



Metodo analitico semplificato per la valutazione della conduttanza delle rotaie

Simplified analytical method for evaluating rails conductance

Giovanni LUCCA (*)

Sommario - In questo articolo presentiamo un metodo analitico semplificato per la valutazione della conduttanza verso terra delle rotaie; il metodo proposto tiene conto della presenza di traversine e ballast; inoltre, la descrizione del suolo è basata su un modello a due strati; ciò rappresenta un miglioramento rispetto al modello, spesso usato, di terreno omogeneo.

Abstract - In this paper we present a simplified analytical method for the evaluation of the rails conductance to earth; the proposed method takes into account of the presence of sleepers and ballast; moreover the description of the soil is based on a two layer model which represents an improvement with respect to, the often used, homogeneous earth model.

1. Introduzione

In studi e progetti riguardanti la valutazione dell'interferenza elettromagnetica prodotta da linee ferroviarie elettrificate (sia in corrente alternata che in corrente continua) su strutture metalliche come tubazioni e cavi di telecomunicazione, un parametro di importanza fondamentale è la conduttanza della rotaia verso terra.

Lo stesso vale quando si considerano le correnti vaganti che sono responsabili dell'incremento del rischio di corrosione per tubazioni e condotte metalliche poste nelle vicinanze del tracciato della linea ferroviaria.

La conduttanza delle rotaie gioca un ruolo molto importante anche per quanto riguarda la valutazione della tensione di rotaia. Ricordiamo che tali valutazioni sono finalizzate ad assicurare la sicurezza elettrica per le persone e per gli impianti (si vedano per esempio le norme EN 50443, IEC EN 50122-1) e a stimare il rischio di corrosione legato alle correnti vaganti (si vedano le norme EN 50162, EN 50122-2).

Inoltre, le conduttanze delle rotaie (auto e mutue) sono importanti anche quando si affrontano problematiche legate al segnalamento poiché esse influenzano direttamente le prestazioni dei circuiti di binario (se presenti).

E' ben noto che l'intera linea ferroviaria (conduttori di alimentazione, di protezione e rotaie) può essere efficacemente simulata per mezzo del modello di linea multiconduttore [1], [2], [3] che richiede, come dati di ingresso, la conoscenza delle conduttanze delle rotaie (auto e mutue)

1. Introduction

In projects and studies concerning the evaluation of electromagnetic interference produced by electrified railway lines (both AC and DC) on metallic structures, such as pipelines and telecommunication cables, a parameter of fundamental importance is the rail conductance to earth.

The same is true when dealing with stray current impact which is responsible of the increased corrosion risk for metallic pipes and ducts located nearby the railway line route.

Rail conductance also plays a very important role also when rail voltage evaluation is concerned. We recall that all these assessments are aimed at ensuring the electrical safety for people and installations (see, for example, EN 50443, IEC EN 50122-1 standards) and to estimate the risk of corrosion related to stray currents (see EN 50162, EN 50122-2 standards).

In addition, rails conductances (self and mutual) are important also when dealing with signalling as they directly affect the performance of track circuits (if present).

It is well known that the railway line as a whole (feeding and protection conductors together rails) can be effectively simulated by means of the multi-conductor line model [1], [2], [3] which requires the knowledge of the per unit length (p.u.l.) rail conductances (self and mutual) that just are the subject of this paper.

In other words, the p.u.l. conductances (or, more precisely, as outlined in section 2.1, the coefficients of conduc-

(*) SIRT S.p.A. Via Stamira d'Ancona 9, 20127 Milano

(*) SIRT S.p.A. Via Stamira d'Ancona 9, 20127 Milano

per unità di lunghezza (p.u.l.) le quali sono l'oggetto del presente articolo.

In altre parole, le conduttanze p.u.l. (o, più precisamente, come specificato al paragrafo 2.1, i coefficienti di conduttanza) sono parametri di ingresso fondamentali per il modello multiconduttore che descrive la linea di trazione in quanto essi hanno una forte influenza sulla distribuzione di tensioni e correnti lungo la linea di trazione stessa. A sua volta, la distribuzione di tali tensioni e correnti lungo la linea di trazione influenza largamente il livello di interferenza elettromagnetica generata su altre strutture come cavi di telecomunicazione, tubazioni metalliche ecc.

Quindi, una stima affidabile delle conduttanze p.u.l. delle rotaie è di grande importanza per una corretta valutazione dei possibili effetti su strutture interferite elettricamente da linee ferroviarie.

A causa della complessa geometria (si veda una rappresentazione semplificata di un binario ferroviario in Fig. 1), l'approccio finora seguito in letteratura per calcolare le conduttanze delle rotaie, tenendo conto di traversine e ballast, è basato su metodi numerici; infatti, si possono trovare alcuni articoli basati sul metodo degli elementi finiti (FEM) [4], [5] mentre, più recentemente, è stato proposto un approccio alternativo, basato sul Metodo degli Elementi di Contorno (BEM) [6], [7].

Al contrario, in questo articolo, presentiamo un approccio semplificato, ma analitico che, come nei metodi numerici, precedentemente menzionati, ha il merito di tener conto dei principali elementi del binario che influenzano la dispersione di corrente nel suolo cioè traversine e ballast. Inoltre la descrizione del terreno è basata su un modello a due strati che rappresenta un miglioramento rispetto al modello, spesso usato, di suolo omogeneo.

I risultati presentati in questo articolo sono ottenuti nell'ipotesi di corrente continua e pertanto direttamente applicati a linee ferroviarie con questo tipo di alimentazione; tuttavia essi possono essere estesi anche al caso di

tance) are key input data for the multi-conductor model representing the traction line as they have a decisive influence on the distribution of voltages and currents along the traction line itself. In turn, the distribution of such voltages and currents, present on the traction line, greatly affects the electromagnetic interference level generated on other structures such as telecommunication cables, metallic pipes, etc. Then, a reliable estimation of the p.u.l. rail conductances is of great importance for a correct assessment of the possible effects on structures electrically interfered by railway lines.

Due to the complicated geometry (see in Fig. 1 a sketch of a railway track), the approach followed till now in literature, to calculate the rail conductances by taking into account the presence of sleepers and ballast, is based on numerical methods; in fact, some papers, based on the Finite Element Method (FEM) [4], [5] can be found while, more recently, an alternative approach [6], [7] based on Boundary Element Method (BEM) has been proposed.

On the contrary, in this paper, we present a simplified but analytical approach that, as in the previously mentioned numerical methods, has the merit of taking into account the main elements of the track which influence the current leakage current to soil i.e. sleepers and ballast. Furthermore, the description of the soil is based on a two layer model which represents an improvement with respect to the, often used, homogeneous earth model.

The results presented in this paper are obtained under a DC assumption and therefore directly applied to the railway lines with this type of power supply; however, they can also be extended to AC (i.e. 16.67Hz, 50Hz and 60Hz) railway lines, since, at the typical traction frequencies, rail conductances values are almost identical to those at 0Hz [8], [9].

2. Description of the calculation method

2.1. Transmission line model for rails

The first fundamental hypothesis is based on the adoption of the transmission line model for rails that are treated as parallel, infinitely long conductors and conductively¹ coupled through sleepers, ballast and earth.

By assuming the transmission line model, one also implicitly assumes a two-dimensional model for the group of conductors considered.

⁽¹⁾ In the case of AC railway lines, rail-to-ground circuits are also inductively coupled, but this does not affect the conductance evaluation at all, because, at low frequencies, inductive and conductive couplings can be separately studied. From the theoretical point of view, rails are also capacitively coupled, but, at the frequencies considered, such an effect can be neglected with good approximation.

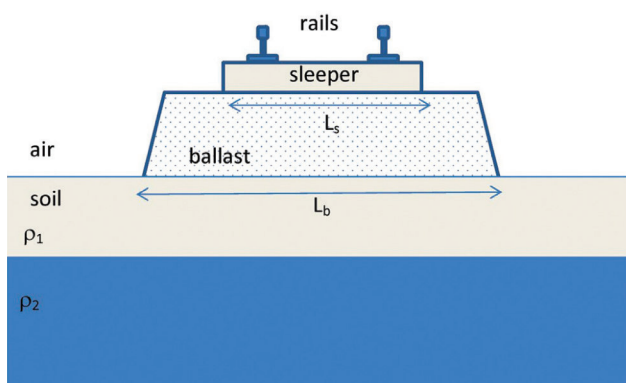


Figura 1 - Rappresentazione schematica del binario.
Figure 1 - Track sketch.

linee ferroviarie in corrente alternata (cioè 16.67Hz, 50Hz and 60Hz) poiché, alle tipiche frequenze utilizzate nella trazione, le conduttanze delle rotaie sono quasi identiche a quelle a 0Hz [8], [9].

2. Descrizione del metodo di calcolo

2.1. Modello di linea di trasmissione per le rotaie

La prima ipotesi fondamentale è basata sulla adozione del modello di linea di trasmissione per le rotaie che sono trattate come conduttori infinitamente lunghi e accoppiati, dal punto di vista conduttivo¹, attraverso traverse, ballast e terreno.

Assumendo il modello di linea di trasmissione, implicitamente si assume un modello bidimensionale per il gruppo di conduttori considerati.

Pertanto, se x è la progressiva lungo il binario ed N è il numero di rotaie, le equazioni che legano le correnti disperse p.u.l. da parte delle rotaie ($-dI_i/dx$) con il potenziale delle rotaie V_i ($i=1, 2, \dots, N$) possono essere espresse in forma compatta come:

$$-\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dx} \\ \frac{dI_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dI_N}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

In (1), la matrice quadrata $[g]$ di ordine $N \times N$ rappresenta i coefficienti di conduttanza p.u.l.; essi non hanno un diretto significato fisico, ma sono legati alle conduttanze p.u.l. attraverso le seguenti relazioni:

$$G_{k0} = \sum_{j=1}^N g_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2a)$$

$$G_{kj} = -g_{kj} \quad k, j = 1, 2, \dots, N \quad k \neq j \quad (2b)$$

In (2a), G_{k0} rappresenta la conduttanza p.u.l. della k -esima rotaia rispetto alla terra (lontana) mentre in (2b) G_{kj} rappresenta la conduttanza mutua p.u.l. tra le rotaie k -esima e j -esima.

A differenza dei coefficienti di conduttanza che sono mere quantità matematiche (esse non sono altro che gli elementi della matrice quadrata in formula (1)), le con-

So, if x is the progressive along the rails and N the number of rails, the equations relating the p.u.l. leakage currents from the rails ($-dI_i/dx$) with rails potentials V_i ($i=1, 2, \dots, N$) can be expressed in compact form as:

$$-\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dx} \\ \frac{dI_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dI_N}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

In (1), the square matrix $[g]$ of $N \times N$ order represents the p.u.l. coefficients of conductance; they do not have a direct physical meaning, but they are related to the p.u.l. conductances by means of the following relationships:

$$G_{k0} = \sum_{j=1}^N g_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2a)$$

$$G_{kj} = -g_{kj} \quad k, j = 1, 2, \dots, N \quad k \neq j \quad (2b)$$

In (2a), G_{k0} represents the p.u.l. conductance of the k -th rail with respect to (remote) earth while in (2b) G_{kj} represents the p.u.l. mutual conductance between k -th and j -th rails.

Unlike coefficients of conductance which are pure mathematical quantities (they just are the elements of the square matrix in formula (1)), conductances have a direct physical and circuital meaning (see Fig. 3) and, as such, can be measured (see for example [9]); in particular, the conductance to earth is related to the current leaked in the soil, while the mutual conductance is related to currents exchanged among rails.

It is necessary to mention that the p.u.l. coefficients of conductance contained in matrix $[g]$, above introduced, are not directly calculated but they are obtained by means of the coefficients of potential (also said Maxwell coefficients) matrix $[w]$; the square matrix $[w]$ is related to $[g]$ through the following relationship:

$$[g] = [w]^{-1} \quad (3)$$

Once the elements of $[g]$ are known, the evaluation of the p.u.l. conductances is possible by means of (2a) and (2b).

It is useful to notice, by looking at formula (2a), that the p.u.l. conductance to earth of the k -th rail depends not only on the k -th self coefficient of conductance but also on the mutual coefficients of conductance between the k -th rail and the other $(N-1)$ rails; in other words, the p.u.l. conductance to earth of a rail also depend on the mutual conductive coupling with all the other rails present.

2.2. Track geometry simplification and equivalent circuit

The second fundamental assumption deals with the track geometrical and electrical simplification (see Fig. 2); for simplicity, we have considered a single track line, but

⁽¹⁾ Nel caso di linee in corrente alternata, i circuiti rotaia-terreno sono accoppiati anche dal punto di vista induttivo, ma questo non influenza affatto la valutazione delle conduttanze perché, alle basse frequenze, gli accoppiamenti induttivo e conduttivo possono essere studiati separatamente. Teoricamente, le rotaie sono accoppiate anche dal punto di vista capacitivo, ma, alle frequenze considerate, tale accoppiamento può essere trascurato con buona approssimazione.

duttanze hanno un significato fisico e circuitale diretto (si veda Fig. 3) e, come tali possono essere misurate (si veda per esempio [9]); in particolare, la conduttanza verso terra è legata alla corrente dispersa nel suolo, mentre la conduttanza mutua è legata alle correnti scambiate tra rotaie.

E' necessario menzionare che i coefficienti di conduttanza p.u.l. contenuti nella matrice $[g]$, sopra introdotta, non vengono calcolati direttamente ma sono ottenuti per mezzo della matrice dei coefficienti di potenziale (detti anche coefficienti di Maxwell) $[w]$; la matrice quadrata $[w]$ è legata a $[g]$ per mezzo della seguente relazione:

$$[g] = [w]^{-1} \quad (3)$$

Una volta noti gli elementi di $[g]$, la valutazione delle conduttanze p.u.l. è possibile attraverso le (2a) e (2b).

E' utile notare, guardando alla formula (2a), che la conduttanza p.u.l. della k-esima rotaia dipende non solo dal k-esimo coefficiente di conduttanza ma anche dai coefficienti di conduttanza mutui tra la k-esima rotaia e le altre (N-1) rotaie; in altre parole, la conduttanza verso terra p.u.l. di una rotaia dipende anche dal mutuo accoppiamento conduttivo di essa con tutte le altre rotaie presenti.

2.2. Semplificazione della geometria del binario e circuito equivalente

La seconda assunzione fondamentale riguarda la semplificazione geometrica ed elettrica del binario (vedi Fig. 2); per semplicità, abbiamo considerato una linea a binario singolo, ma l'estensione del modello a linee a doppio binario o multi binario è immediata.

In Fig. 2 possiamo notare che le rotaie sono modellizzate da conduttori semicilindrici equivalenti e il ruolo delle traversine e ballast è giocato da un rivestimento equivalente di forma semicilindrica interposto tra rotaia e suolo; quest'ultimo è rappresentato da due strati orizzontali aventi resistività ρ_1 e ρ_2 rispettivamente.

Il circuito equivalente associato alla rappresentazione semplificata del binario è mostrato in Fig. 3.

In Fig. 3, possiamo notare che la conduttanza totale p.u.l. verso terra (lontana) di una rotaia è data dalla combinazione in serie della conduttanza p.u.l., associata al contributo di traversine e ballast, con la conduttanza p.u.l. associata al contributo del

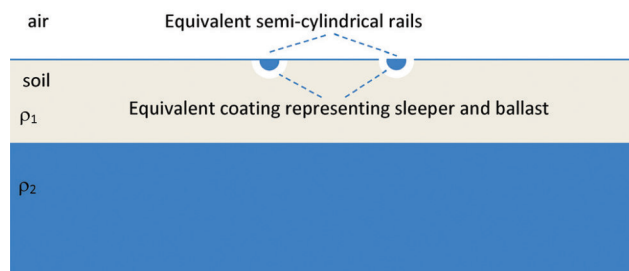


Figura 2 - Modello equivalente semplificato del binario.
Figure 2 - Equivalent simplified model of the track.

the extension of the model to double track or multi-track lines is straightforward.

In Fig. 2 we can notice that the rails are modelled by equivalent semi-cylindrical conductors and the role of sleeper and ballast is played by an equivalent semi-cylindrical coating interposed between rail and soil; the latter one is represented by two horizontal layers having resistivity ρ_1 and ρ_2 respectively.

The equivalent circuit associated to the simplified track representation is shown in Fig. 3.

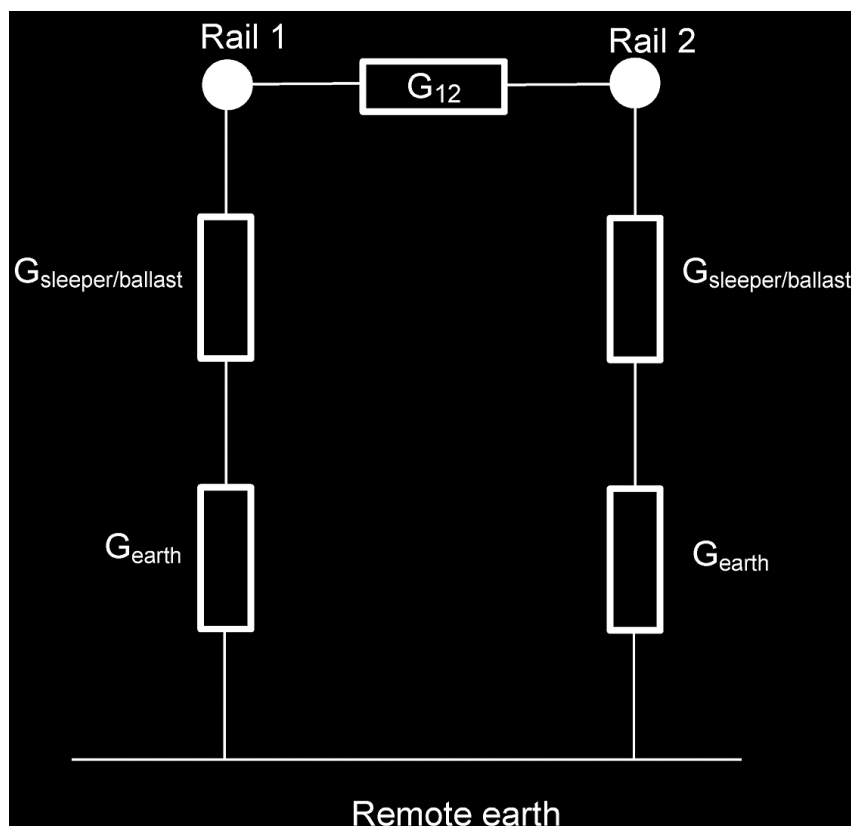


Figura 3 - Circuito equivalente del binario.
Figure 3 - Equivalent circuit of the track.

terreno; pertanto, la conduttanza totale p.u.l. G_{i0} ($i=1,2$) verso la terra lontana di una rotaia è data dalla relazione:

$$\frac{1}{G_{i0}} = \frac{1}{G_{\text{sleeper/ballast}}} + \frac{1}{G_{\text{earth}}} \quad (4)$$

In Fig. 3 è mostrato anche l'elemento G_{12} che rappresenta la conduttanza mutua p.u.l. tra le due rotaie.

I prossimi paragrafi sono dedicati a presentare le formule necessarie per il calcolo degli elementi mostrati nel circuito di Fig. 3.

2.3. Conduttanza di traversine e ballast

L'idea fondamentale è rappresentare traversine e ballast mediante strati equivalenti di forma semicilindrica ed aventi conducibilità data da σ_s e σ_b ; i punti principali da porre in evidenza sono:

- Le rotaie sono rappresentate da due conduttori equivalenti semicilindrici aventi raggio dato da:

$$r_{r \text{ eq}} = \frac{L_r}{\pi} \quad (5)$$

ove L_r è la larghezza della base della rotaia (cioè la parte di superficie della rotaia a diretto contatto con la traversina). Quindi, la (5) implica che l'area di contatto tra rotaia equivalente semicilindrica e traversina è uguale a quella tra la rotaia reale e la traversina.

- Le traversine sono rappresentate da uno strato equivalente semicilindrico avente raggio interno dato da (5) e raggio esterno dato da:

$$r_{s \text{ eq}} = \frac{L_s}{\pi} \quad (6)$$

ove L_s è la lunghezza della traversina (cioè la parte a diretto contatto con il ballast). Pertanto, la (6) implica che l'area di contatto tra traversina equivalente semicilindrica e ballast è uguale a quella tra traversina reale e ballast.

La conduttanza p.u.l. G_s associata alle traversine è data da:

$$G_s = \frac{\sigma_s \pi}{\ln\left(\frac{r_{s \text{ eq}}}{r_{r \text{ eq}}}\right)} \quad (7)$$

- Il ballast è rappresentato da uno strato equivalente semicilindrico avente raggio interno dato dalla (6) e raggio esterno dato da:

$$r_{b \text{ eq}} = \frac{L_b}{\pi} \quad (8)$$

ove L_b è l'ampiezza del ballast (cioè la parte a diretto contatto col suolo). Pertanto, la (8) implica che l'area di contatto tra strato equivalente semicilindrico di ballast e suolo è uguale a quella tra ballast reale e suolo.

In Fig. 3, we can notice that the total p.u.l. conductance to (remote) earth of a rail is given by the series of the p.u.l. conductance associated to the sleeper and ballast contribution and of the p.u.l. conductance associated to the earth contribution; thus, the total p.u.l. conductance to remote earth of a rail G_{i0} ($i=1,2$) can be obtained by the relationship:

$$\frac{1}{G_{i0}} = \frac{1}{G_{\text{sleeper/ballast}}} + \frac{1}{G_{\text{earth}}} \quad (4)$$

In Fig. 3 is also drawn the element G_{12} that represents the p.u.l. mutual conductance between the two rails.

The next paragraphs are devoted to present the formulas needed for the calculation of the elements shown in the circuit of Fig. 3.

2.3. Sleeper and ballast conductance

The basic idea is to represent sleeper and ballast by equivalent semi-cylindrical layers having conductivity given by σ_s and σ_b ; the main points to be put into evidence are:

- The rails are represented by two equivalent semi-cylindrical conductors having radius given by:

$$r_{r \text{ eq}} = \frac{L_r}{\pi} \quad (5)$$

where L_r is the width of the rail foot (that is the portion of rail surface in direct contact with the sleeper). Thus, (5) implies that the contact area between the equivalent rail semi-cylinder and sleeper is equal to the one between real rail and sleeper.

- The sleepers are represented by an equivalent semi-cylindrical layer having internal radius given by (5) and external radius given by:

$$r_{s \text{ eq}} = \frac{L_s}{\pi} \quad (6)$$

where L_s is the length of the sleeper (that is the portion sleeper in direct contact with the ballast). Thus, (6) implies that the contact area between the equivalent sleeper semi-cylindrical layer and ballast is equal to the one between real sleeper and real ballast.

The p.u.l. conductance G_s associated to the sleepers is given by:

$$G_s = \frac{\sigma_s \pi}{\ln\left(\frac{r_{s \text{ eq}}}{r_{r \text{ eq}}}\right)} \quad (7)$$

- The ballast is represented by an equivalent semi-cylindrical layer having internal radius given by (6) and external radius given by:

$$r_{b \text{ eq}} = \frac{L_b}{\pi} \quad (8)$$

La conduttanza p.u.l. G_b associata al ballast è data da:

$$G_b = \frac{\sigma_b \pi}{\ln\left(\frac{r_{beq}}{r_{seq}}\right)} \quad (9)$$

In molti casi, è presente un tappetino in materiale polimerico tra la base della rotaia e la traversina con lo scopo di aumentare l'isolamento tra le stesse; il modello qui descritto non tiene conto della presenza di tale tappetino. Tuttavia, il modello potrebbe essere opportunamente adattato introducendo un ulteriore strato semicilindrico di materiale isolante avente spessore d_{mat} di alcuni millimetri ed interposto tra rotaia e traversina; la conduttanza p.u.l. G_{mat} associata a questo ulteriore strato semicilindrico ha una formula data da:

$$G_{mat} = \frac{\sigma_{mat} \pi}{\ln\left(\frac{r_{req} + d_{mat}}{r_{req}}\right)} \quad (10)$$

Essendo σ_{mat} la resistività del tappetino isolante.

Notare che le formule (7), (9) e (10) sono basate sulla conduttanza p.u.l. di uno strato cilindrico la quale può essere facilmente trovata in letteratura (si vedano per esempio [10], [11]); infine di ricavare le (7), (9) e (10), si deve tenere a mente che nel nostro caso, essendo la forma degli strati semicilindrica ed essendo le formule riportate in [9], [10] valide per uno strato cilindrico, le relazioni qui riportate tengono conto di un fattore moltiplicativo pari a 1/2.

Pertanto, la conduttanza equivalente p.u.l. legata alla presenza di traversine e ballast è data da:

$$\frac{1}{G_{sleeper/ballast}} = \frac{K_{mat}}{G_{mat}} + \frac{1}{G_{sleeper}} + \frac{1}{G_{ballast}} \quad (11)$$

Ove K_{mat} è una costante che è uguale a 1 oppure 0 a seconda della presenza o meno del tappetino isolante.

In [7] sono presentati alcuni risultati relative all'influenza del tappetino.

Poiché nel presente articolo intendiamo focalizzarci sull'influenza della resistività del suolo e sull'ampiezza dello spessore del primo strato del terreno, nel seguito supporremo che $K_{mat}=0$.

Prima di concludere il paragrafo, è necessario aggiungere alcune osservazioni riguardanti la formula (7). Implicitamente, essa è basata sull'assunzione che l'area di contatto tra traversine e ballast sia continua lungo il binario. Tuttavia, questo in realtà non è vero perché, a causa della presenza non continua ma in posizioni discrete delle traversine sotto le rotaie, la simmetria longitudinale del modello è violata. Per superare tale difficoltà, come suggerito in [12], si può introdurre una conducibilità equivalente delle traversine σ_{seq} data da:

$$\sigma_{seq} = \frac{2}{3} \sigma_b + \frac{1}{3} \sigma_s \quad (12)$$

Si può giustificare tale formula ricordando che l'area effettiva di contatto tra traversine e ballast è approssima-

where L_b is the width of the ballast (that is the portion ballast in direct contact with the soil). Thus, (8) implies that the contact area between the equivalent ballast semi-cylindrical layer and soil is equal to the real one between real ballast and soil.

The p.u.l. conductance G_b associated to the ballast is given by:

$$G_b = \frac{\sigma_b \pi}{\ln\left(\frac{r_{beq}}{r_{seq}}\right)} \quad (9)$$

In many cases, a polymeric mat is present between the foot of the rail and the sleeper, with the aim of increasing the electrical insulation between the rail and the sleeper themselves; the model, as described herein, does not take into account the presence of such a mat. Nevertheless, it could be suitably adapted, by introducing, a further semi-cylindrical layer of insulating material having thickness d_{mat} of some millimeters, interposed between rail and sleeper; the p.u.l. conductance G_{mat} associated to this further semi-cylindrical layer has a formula given by:

$$G_{mat} = \frac{\sigma_{mat} \pi}{\ln\left(\frac{r_{req} + d_{mat}}{r_{req}}\right)} \quad (10)$$

Being σ_{mat} the resistivity of the insulating mat.

Note that formulas (7), (9) and (10) are based on the expression for the p.u.l. conductance of a cylindrical layer that can be easily found in literature (see for example [10], [11]); in order to obtain (7), (9) and (10), one has to remind that, having, in our case, the layer a semi-cylindrical shape and being the formulas reported in [10], [11] valid for a cylindrical layer, the formulas here reported take into account of a multiplying factor 1/2.

Therefore, the p.u.l. equivalent conductance related to the sleeper/ballast presence is given by:

$$\frac{1}{G_{sleeper/ballast}} = \frac{K_{mat}}{G_{mat}} + \frac{1}{G_{sleeper}} + \frac{1}{G_{ballast}} \quad (11)$$

Where K_{mat} is a constant that is equal to 1 or 0 depending on the presence of the insulating mat or not.

In [7] some results concerning the influence of the insulating mat have been presented.

Since in the article we intend to focus on the influence of soil resistivity and of the thickness of the first layer of soil, in the following we will suppose that $K_{mat}=0$.

Before concluding the paragraph, it necessary to add some remarks concerning formula (7). Implicitly, it is based on the assumption that the area of contact between sleepers and ballast is continuous along the track. Nevertheless, this is not the real situation because, due to the discrete placement of the sleepers under the rails, the longitudinal symmetry of the model is broken. In order to overcome such difficulty, as suggested in [12] one could introduce an equivalent sleeper conductivity σ_{seq} given by:

tivamente 1/3 dell'area che esisterebbe in caso di "traversine continue".

Una considerazione analoga ed una formula analoga potrebbero essere introdotte per tenere conto del tappetino isolante sotto le rotaie; in tal caso, la conducibilità equivalente del tappetino $\sigma_{mat\ eq}$ sarebbe data da:

$$\sigma_{mat\ eq} = \frac{2}{3}\sigma_b + \frac{1}{3}\sigma_{mat} \quad (13)$$

Infine, vogliamo porre in evidenza che l'approccio semplificato nel modellizzare traversine e ballast, non ha la finalità di simulare il reale campo di densità di corrente al loro interno; lo scopo è solo quello di calcolare una conduttanza equivalente che consenta di descrivere il comportamento, in termini globali, di traversine e ballast e permetta di simulare il loro effetto isolante tra rotaia e suolo.

2.4. Contributo dovuto al suolo a due strati

Al fine di modellizzare l'influenza del suolo a due strati, utilizziamo l'approccio descritto da Sunde [13] (i dettagli sono forniti in Appendice); in base ad esso, il contributo del suolo relativo al coefficiente di potenziale p.u.l. della rotaia è:

$$w_{11\ earth}(\Gamma) = w_{22\ earth}(\Gamma) = \frac{\rho_2}{\pi}K_0(\Gamma r_{eq}) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi}K_0\left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\right)^2}\right) \quad (14)$$

Mentre il coefficiente di potenziale mutuo p.u.l tra le rotaie è dato da:

$$w_{12\ earth} = w_{21\ earth} = \frac{\rho_2}{\pi}K_0(\Gamma D_r) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi}K_0\left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\right)^2}\right) \quad (15)$$

Ove Δ è lo spessore del primo strato del terreno, D_r è la distanza tra le due rotaie, K_0 è la funzione di Bessel modificata di secondo tipo e di ordine 0 ed η è una funzione del rapporto ρ_1/ρ_2 . Per quanto riguarda la grandezza Γ , che appare nelle (14) e (15), essa verrà definita più avanti.

Infine, in accordo con [13], il parametro η può essere ottenuto per interpolazione lineare tenendo conto dei valori in Tab. 1.

Tabella 1 – Table 1

Valori di η in funzione del rapporto ρ_1/ρ_2
Values of η versus the ratio ρ_1/ρ_2

ρ_1/ρ_2	η
0.02	0.12
0.1	0.4
1	1.16
10	1.84
100	2

$$\sigma_{seq} = \frac{2}{3}\sigma_b + \frac{1}{3}\sigma_s \quad (12)$$

One can justify this formula by remembering that the actual area of contact between sleepers and ballast is approximately 1/3 of the area that would exist in case of "continuous sleepers".

A similar consideration and similar formula could be introduced for taking into account of the discrete placement of the insulating mats under the rail; in that case, the equivalent mat conductivity $\sigma_{mat\ eq}$ would be given by:

$$\sigma_{mat\ eq} = \frac{2}{3}\sigma_b + \frac{1}{3}\sigma_{mat} \quad (13)$$

Finally, we would like to emphasize that, the simplified approach in modelling sleepers and ballast, has not the purpose of simulating the real field of current density inside them; the aim is just to calculate an equivalent conductance that enables to describe the global behaviour of sleepers and ballast and allows to simulate their insulating effect between rails and soil.

2.4. Contribution due to the two layer soil

In order to model the influence of the two layer earth, we adopt the approach described by Sunde [13] (the details are shown in the Appendix); according to it, the contribution, relevant to the soil, when dealing with the p.u.l. self-coefficient of potential of the rail, is:

$$w_{11\ earth}(\Gamma) = w_{22\ earth}(\Gamma) = \frac{\rho_2}{\pi}K_0(\Gamma r_{eq}) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi}K_0\left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\right)^2}\right) \quad (14)$$

While the p.u.l. mutual coefficient of potential between the rails is given by:

$$w_{12\ earth} = w_{21\ earth} = \frac{\rho_2}{\pi}K_0(\Gamma D_r) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi}K_0\left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\right)^2}\right) \quad (15)$$

Where Δ is the first layer soil thickness, D_r is the distance between the two rails, K_0 is the modified Bessel function of the second kind and zero order and η is a function of the ratio ρ_1/ρ_2 . As far as the quantity Γ , appearing in equations (14) and (15), is concerned, it will be defined later on.

Lastly, according to [13], the quantity η can be evaluated by linear interpolation by taking into account Tab. 1.

2.5. p.u.l. coefficients of potential matrix

As already remarked in par. 2.1, the matrix $[g]$ of the p.u.l. coefficients of conductance is obtained by inverting the matrix $[w]$ of the p.u.l. coefficients of potential; the elements of $[w]$ are defined as follows:

$$w_{11}(\Gamma) = w_{22}(\Gamma) = \frac{1}{G_{sleeper/ballast}} + w_{earth}(\Gamma) \quad (16a)$$

2.5. Matrice dei coefficienti di potenziale p.u.l.

Come già osservato al par. 2.1, la matrice $[g]$ dei coefficienti di conduttanza p.u.l. è ottenuta per inversione della matrice $[w]$ dei coefficienti di potenziale p.u.l.; gli elementi di $[w]$ sono definiti come segue:

$$w_{11}(\Gamma) = w_{22}(\Gamma) = \frac{1}{G_{\text{sleeper/ballast}}} + w_{\text{earth}}(\Gamma) \quad (16a)$$

Essendo $w_{\text{earth}}(\Gamma)$ definita dalla formula (14). Pertanto, sostituendola all'interno della (16a) abbiamo:

$$w_{11}(\Gamma) = w_{22}(\Gamma) = \frac{1}{G_{\text{sleeper/ballast}}} + \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma r_{\text{eq}}) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi} K_0 \left(r_{\text{eq}} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2} \right) \quad (16b)$$

Per quanto riguarda gli elementi mutui, essi sono dati direttamente dalla formula (15); quindi, abbiamo:

$$w_{12}(\Gamma) = w_{21}(\Gamma) = \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma D_r) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi} K_0 \left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2} \right) \quad (17)$$

Come possiamo notare dalla (15) e (17), i coefficienti mutui di potenziale dipendono solo dal contributo del terreno; infatti, queste formule sono basate sull'assunzione che l'accoppiamento conduttivo tra le rotaie non sia influenzato dalla presenza delle traversine e del ballast, ma solo dal suolo. Questa ipotesi è discutibile e rappresenta il punto di debolezza del modello; nonostante questo, come mostrato nel seguito, il confronto col metodo BEM evidenzia risultati accettabili per quanto riguarda la conduttanza verso terra.

2.6. Determinazione della costante Γ

La costante Γ che appare nelle formule (14)-(17) può essere determinata risolvendo numericamente la seguente equazione trascendente:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{R_r}{w_{ii}(\Gamma)}} \quad (18)$$

Ove $w_{ii}(\Gamma)$ è $w_{11}(\Gamma)$ (o equivalentemente $w_{22}(\Gamma)$) è R_r la resistenza p.u.l. della rotaia. Le formule atte a calcolare R_r , in funzione del tipo di rotaia e della frequenza possono essere trovate in [14].

3. Alcuni risultati

3.1. Considerazioni preliminari

Come è logico aspettarsi e come supportato dall'esperienza [8], le condizioni ambientali, in particolare le condizioni meteorologiche, influenzano fortemente i valori di conduttanza delle rotaie; intuitivamente, la conducibilità di traversine e ballast aumenta con il livello di umidità e pertanto, in condizioni di tempo umido e piovoso, i valori di conducibilità saranno verosimilmente alti mentre in condizioni di tempo caldo e secco i valori tenderanno ad essere bassi.

Being $w_{\text{earth}}(\Gamma)$ the quantity defined by formula (14). Therefore, by substituting it into (16a) we have:

$$w_{11}(\Gamma) = w_{22}(\Gamma) = \frac{1}{G_{\text{sleeper/ballast}}} + \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma r_{\text{eq}}) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi} K_0 \left(r_{\text{eq}} \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2} \right) \quad (16b)$$

As far as the mutual elements are concerned, they are directly given by formula (15); thus, we have:

$$w_{12}(\Gamma) = w_{21}(\Gamma) = \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma D_r) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\pi} K_0 \left(D_r \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2} \right) \quad (17)$$

As we can notice from (15) and (17), the mutual coefficients of potential depend only on the contribution of the earth; in fact, these formulas are based on the assumption that, the conductive coupling between the rails is not influenced by sleepers and ballast, but only by the soil. This hypothesis is questionable and represents the weak point of the model; in spite of that, as shown in the following, the comparison with BEM method yields acceptable results as far as the conductance to earth is concerned.

2.6. Determination of the constant Γ

The constant Γ appearing in formulas (14)-(17) can be determined by numerically solving the following transcendental equation:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{R_r}{w_{ii}(\Gamma)}} \quad (18)$$

Where $w_{ii}(\Gamma)$ is $w_{11}(\Gamma)$ (or equivalently $w_{22}(\Gamma)$) and R_r is the p.u.l. rail resistance. Suitable formulas for calculating R_r , depending on the type of rail and on the frequency, can be found in [14].

3. Some results

3.1. Preliminary considerations

As is logical to expect and as supported by experience [8], environmental conditions, especially weather conditions, strongly affect the conductance values of the rails; intuitively, the conductivity of sleepers and ballast increases with the humidity level; therefore, with damp and rainy weather, high conductivity values are expected while, with hot and dry weather conditions, the values will tend to be low.

In addition to the meteorological factor, the conductivity of sleepers and ballast is also influenced by the age of the track and its maintenance status; in fact, recent and well maintained materials tend to be better insulating than materials with many years of life and poor maintenance.

In fact, poor maintenance implies accumulating, over time, of rust, dirt, contaminants, etc. on ballast and sleepers with the final result of decreasing the electrical insulation level of the rails with respect to the earth and between them.

Oltre al fattore meteorologico, la conducibilità di traversine e ballast è influenzata anche dall'età del binario e dal suo stato di manutenzione; infatti materiali nuovi e ben mantenuti tendono ad essere meglio isolanti rispetto a materiali con molti anni di vita e con scarsa manutenzione.

Infatti, una scarsa manutenzione implica l'accumularsi nel tempo di ruggine, sporcizia, contaminanti ecc. su ballast e traversine col risultato finale di diminuire il livello di isolamento elettrico delle rotaie dal terreno e tra loro stesse.

Tenendo conto sia del fattore meteorologico che di quello legato alla manutenzione del binario, nei calcoli che seguono ed in accordo con [15], è conveniente suddividere a grandi linee i valori di conducibilità di traversine e ballast in tre gruppi:

- Valori bassi (condizioni climatiche secche e buono stato di manutenzione): σ_b e $\sigma_s < 0.05 \text{ S/km}$.
- Valori medi (condizioni climatiche normali e ordinario stato di manutenzione): $0.1 \text{ S/km} < \sigma_b$ e $\sigma_s < 1 \text{ S/km}$.
- Valori alti (condizioni climatiche umide e piovose e scarso stato di manutenzione) σ_b e $\sigma_s > 1 \text{ S/km}$.

In particolare in accordo con [16], poiché il rapporto σ_s / σ_b può essere spesso compreso tra 2 e 3, nei calcoli che seguono abbiamo assunto:

- $\sigma_b = 0.01 \text{ S/km}$ e $\sigma_s = 0.03 \text{ S/km}$ come valori rappresentativi per il primo gruppo;
- $\sigma_b = 0.25 \text{ S/km}$ e $\sigma_s = 0.75 \text{ S/km}$ come valori rappresentativi per il secondo gruppo;

By taking into account both the meteorological factor and the maintenance aspect of the track, in the following calculations and in accordance with [15], it is convenient to split up the conductivity values of ballast and sleepers, into three groups:

- Low values (dry climatic conditions together good maintenance status): σ_b and $\sigma_s < 0.05 \text{ S/km}$.
- Average values (normal climatic conditions together ordinary maintenance status): $0.1 \text{ S/km} < \sigma_b$ and $\sigma_s < 1 \text{ S/km}$.
- High values (damp and rainy climatic conditions together bad maintenance status) σ_b and $\sigma_s > 1 \text{ S/km}$.

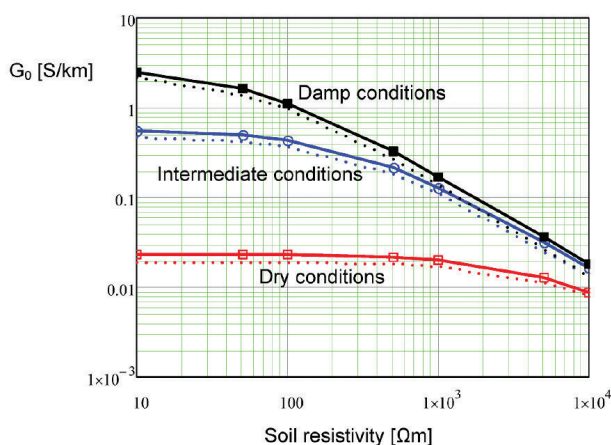
In particular, according to [16], since the ratio σ_s / σ_b can often be between 2 and 3, in the following calculations we assumed:

- $\sigma_b = 0.01 \text{ S/km}$ and $\sigma_s = 0.03 \text{ S/km}$ as representative values for the first group;
- $\sigma_b = 0.25 \text{ S/km}$ and $\sigma_s = 0.75 \text{ S/km}$ as representative values for the second group;
- $\sigma_b = 1.25 \text{ S/km}$ and $\sigma_s = 3.75 \text{ S/km}$ as representative values for the third group.

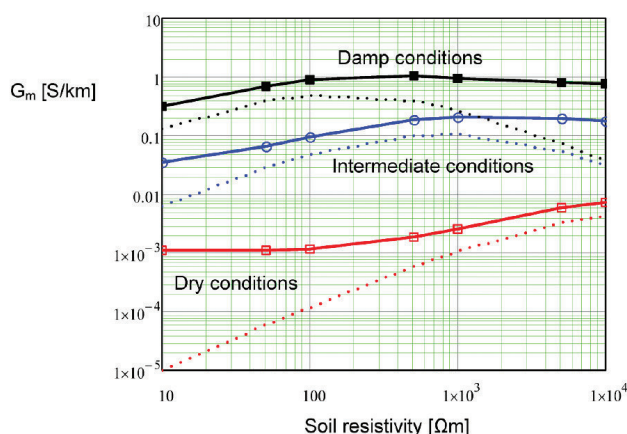
For brevity, the cases relevant to the first, second and third group are indicated respectively with "dry conditions", "intermediate conditions" and "damp conditions" respectively.

3.2. Comparison with data available in literature

Since the two rails are identical and under the same laying conditions, $G_{10} = G_{20}$; then we introduce the only symbol



a



b

Figura 4 - Confronto tra BEM and metodo analitico; conduttanze p.u.l. in funzione della resistività del suolo in corrispondenza di differenti condizioni ambientali. Linee continue: BEM; linee punteggiate: analitico semplificato. (a) Conduttanza della rotaia verso terra, (b) Conduttanza mutua tra le rotaie.

Figure 4 - Comparison between BEM and analytical method; p.u.l. conductances versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions. Continuous lines: BEM; dotted lines: simplified analytical. (a) Rail conductance to earth, (b) mutual conductance between rails.

- $\sigma_b = 1.25 \text{ S/km}$ e $\sigma_s = 3.75 \text{ S/km}$ come valori rappresentativi per il terzo gruppo.

Per brevità, i casi relativi al primo, secondo e terzo gruppo sono indicate rispettivamente con: “dry conditions”, “intermediate conditions” e “damp conditions”.

3.2. Confronto con dati disponibili in letteratura

Poiché le due rotaie sono identiche e nelle stesse condizioni di posa, sarà $G_{10} = G_{20}$; pertanto introduciamo un unico simbolo G_0 per la conduttanza verso terra p.u.l.. Parimenti, indichiamo con G_m la conduttanza mutua p.u.l. tra le rotaie.

Le Fig.4a e 4b mostrano i risultati per G_0 e G_m in accordo col metodo semplificato qui proposto e col metodo BEM [7] in funzione della resistività del suolo; il terreno è supposto omogeneo e non è presente il tappetino isolante tra rotaia e traversina; sono stati effettuati tre differenti gruppi di calcoli in corrispondenza di differenti condizioni climatiche ed ambientali.

Guardando la Fig.4a, si può notare un accordo accettabile tra i risultati riguardanti la conduttanza p.u.l. verso terra in tutte le tre differenti condizioni ambientali considerate.

Al contrario, dalla Fig.4b possiamo notare grosse differenze tra i risultati della mutua conduttanza p.u.l. in tutte le tre differenti condizioni ambientali considerate.

Ciò è dovuto, essenzialmente, all'ipotesi semplificativa relativa al modello analitico secondo la quale solo il terreno è coinvolto nell'accoppiamento conduttivo tra le due rotaie mentre il contributo di traversine e ballast è ignorato.

Abbiamo fatto calcoli analoghi anche nel caso di doppio binario; per ragioni di brevità, omettiamo i grafici, ma i risultati sono simili a quelli del caso con binario singolo ovvero: accordo accettabile per la conduttanza p.u.l. verso terra e significativi scostamenti per le condutture mutue p.u.l.

Al fine di comparare i risultati qui ottenuti per G_0 con quelli disponibili in letteratura, è utile includere la Tab. 2, presa da [1] e riportante i valori minimi, medi e massimi per differenti tipologie di binario.

Confrontando i valori di Fig.2a con quelli di Tab. 2 si

G_0 for the p.u.l. rail conductance to earth. Likewise, we indicate by G_m the p.u.l. mutual conductance among the rails.

Figs.4a and 4b show the results for G_0 and G_m calculated according to the simplified analytical method here proposed and to BEM [7] versus soil resistivity; the soil is supposed homogeneous and no insulating mat is present between rail and sleeper; three different groups of calculation have been performed in correspondence of different climatic and environmental conditions.

By looking at Fig. 4a, one can see an acceptable and fair agreement between the results concerning the p.u.l. conductance to earth in all the three different environmental conditions considered.

On the contrary, from Fig. 4b we can notice large differences between the results of the p.u.l. mutual conductance between the rails in all the three different environmental conditions considered. This is mainly due to the simplifying assumption, relevant to the analytical model, that only the soil is involved in the conductive coupling between the two rails while the contribution of sleepers and ballast is ignored.

We performed similar calculations also in the case of double track; for reason of brevity we omit the graphs, but the results are similar to the case of single track i.e.: acceptable agreement for the p.u.l. rail conductance to earth and significant discrepancies for the p.u.l. mutual conductances.

In order to compare the results here obtained for G_0 with those available in literature, it is useful to also include Tab. 2, taken from [1], reporting minimum, average and maximum values for different track typologies.

By comparing the values of Fig. 2a with the ones of Tab. 2, one can notice that, basically, the calculated values fall within the ranges indicated in the table.

3.3 Influence of soil resistivity

In this paragraph, we present some results of the p.u.l. rail conductance G_0 by varying the values of the earth resistivity ρ_1 and ρ_2 and by considering a fixed value $\Delta = 1 \text{ m}$ for the thickness of the first layer of soil. The calculations have been performed by assuming the three environmental conditions previously considered.

Figs. 5a, 5b and 5c show the trend of G_0 versus the first layer soil resistivity ρ_1 and for different values of the bottom soil resistivity ρ_2 .

By looking at them, we can make the following remarks:

- 1) As expected, by increasing both ρ_1 and ρ_2 the p.u.l. rail conductance to earth decreases.
- 2) The influence of the soil resistivity is much smaller in environmental dry

Tabella 2 – Table 2

Valori tipici di conduttanza p.u.l. delle rotaie
Typical values for p.u.l. rail conductance

	Min Min	Medio Average	Max Max
Binario senza segnalamento Track without signalling purposes	[0.05, 0.1] S/km	[1, 2] S/km	[4, 5] S/km
Binario con segnalamento Track with signalling purposes	[0.02, 0.05] S/km	[0.5, 1] S/km	[1, 2] S/km

può notare che, nel complesso, i valori calcolati, rientrano all'interno degli intervalli indicati nella tabella.

3.3. Influenza della resistività del suolo

In questo paragrafo presentiamo alcuni risultati della conduttanza p.u.l. della rotaia G_0 variando i valori delle resistività del suolo ρ_1 e ρ_2 e considerando un valore fisso di $\Delta=1\text{m}$ per lo spessore del primo strato di terreno. I calcoli sono svolti assumendo le tre condizioni ambientali prima considerate.

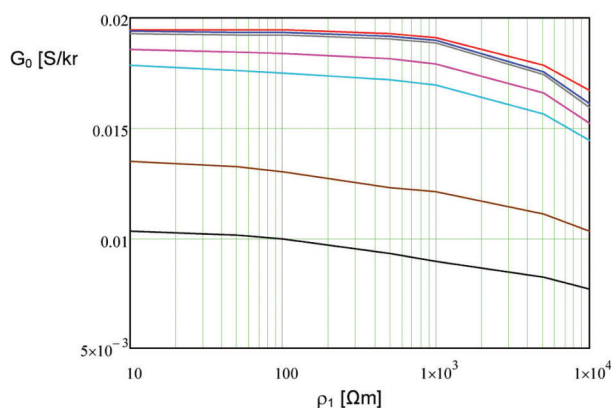
Le Fig.5a, 5b e 5c mostrano l'andamento di G_0 in funzione della resistività ρ_1 del primo strato in corrispondenza di differenti valori della resistività ρ_2 del terreno dello strato inferiore.

Guardandole, possiamo fare le seguenti osservazioni:

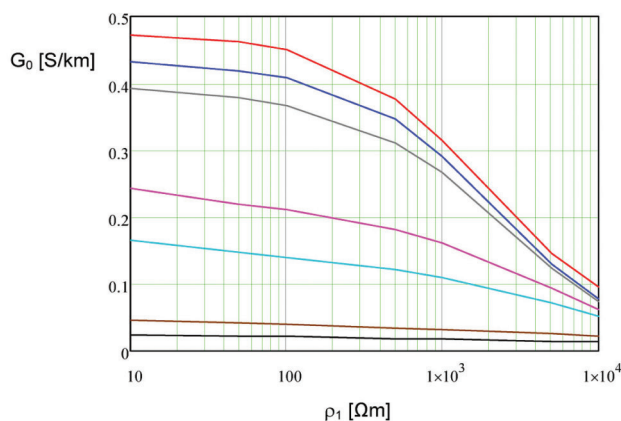
- 1) Come ci si poteva attendere, incrementando sia ρ_1 che ρ_2 la conduttanza p.u.l. della rotaia diminuisce.
- 2) L'influenza delle resistività del suolo è molto più piccola in condizioni ambientali secche rispetto a quelle intermedia e umide; infatti, se consideriamo il rapporto τ tra i valori di G_0 ottenuti quando $\rho_1=\rho_2=10\Omega\text{m}$ e quando $\rho_1=\rho_2=10000\Omega\text{m}$ (cioè il rapporto dei valori ottenuti in corrispondenza di valori estremi di resistività) si ottiene:
 - $\tau=2.55$ in condizioni ambientali secche;
 - $\tau=36.31$ in condizioni ambientali intermedie;
 - $\tau=163$ in condizioni ambientali umide.

3.4. Influenza dello spessore del primo strato di suolo

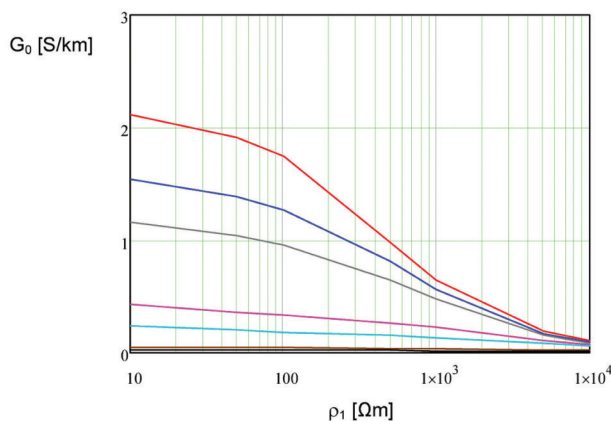
In questo paragrafo, presentiamo alcuni risultati ottenuti variando lo spessore Δ del primo strato di terreno. Nelle Fig. 6a e 6b sono mostrati i valori di G_0 in funzione dello spessore Δ e in differenti condizioni ambienta-



(a) Dry conditions



(b) Intermediate conditions



(c) Damp conditions

Figura 5 - Conduttanza della rotaia p.u.l in funzione della resistività del primo strato; dall'alto in basso, curve corrispondenti a: $\rho_2=10\Omega\text{m}$, $50\Omega\text{m}$, $100\Omega\text{m}$, $500\Omega\text{m}$, $1000\Omega\text{m}$, $5000\Omega\text{m}$, $10000\Omega\text{m}$; $=1\text{m}$.

Figure 5 - P.u.l rail conductance versus first layer soil resistivity; from top to bottom, curves corresponding to: $\rho_2=10\Omega\text{m}$, $50\Omega\text{m}$, $100\Omega\text{m}$, $500\Omega\text{m}$, $1000\Omega\text{m}$, $5000\Omega\text{m}$, $10000\Omega\text{m}$; $=1\text{m}$.

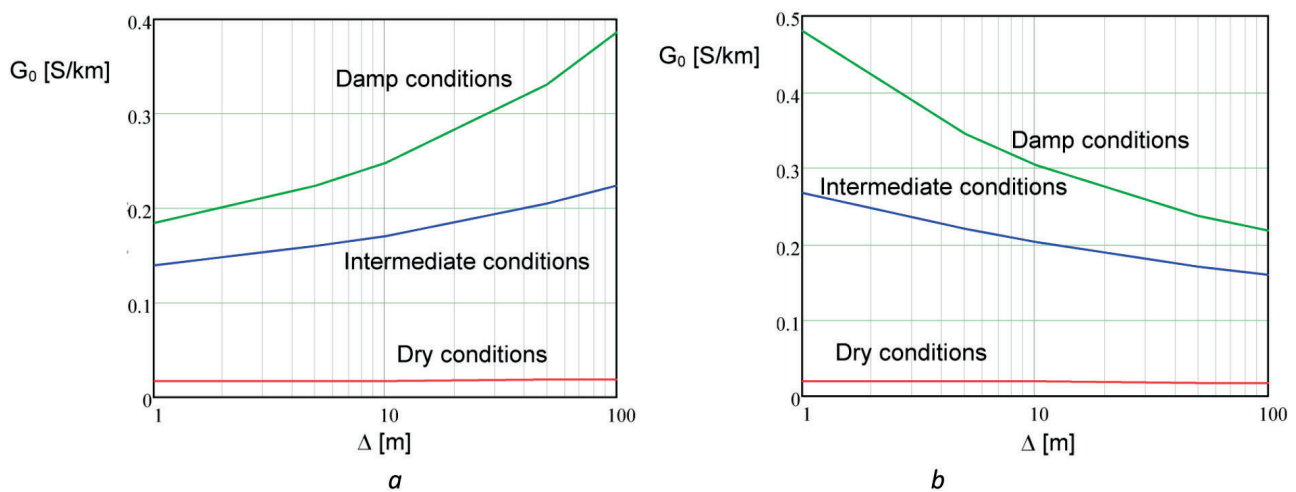


Figura 6 - Conduttanza della rotaia p.u.l. in funzione di Δ in corrispondenza di differenti condizioni ambientali. (a) $\rho_1=100\Omega m$ e $\rho_2=1000\Omega m$, (b) $\rho_1=1000\Omega m$ e $\rho_2=100\Omega m$.

Figure 6 - p.u.l. rail conductance versus Δ in correspondence of different environmental conditions. (a) $\rho_1=100\Omega m$ and $\rho_2=1000\Omega m$, (b) $\rho_1=1000\Omega m$ and $\rho_2=100\Omega m$.

li. Per quanto riguarda le resistività del suolo, abbiamo considerato due casi:

a) $\rho_1=100\Omega m$ e $\rho_2=1000\Omega m$;

b) $\rho_1=1000\Omega m$ e $\rho_2=100\Omega m$.

Guardando alle Fig. 6, possiamo fare le seguenti osservazioni:

- 1) Come ci si poteva attendere, nel caso a) aumentando lo spessore del primo strato di suolo (che ha resistività più piccola), la conduttanza G_0 della rotaia aumenta; l'opposto vale per il caso b) quando il primo strato di suolo ha resistività più alta.
- 2) L'influenza dello spessore del primo strato di suolo è pressoché trascurabile in condizioni ambientali secche.

4. Conclusioni

Abbiamo presentato un metodo analitico semplificato per il calcolo della conduttanza verso terra p.u.l. delle rotaie. Esso tiene conto della presenza delle traversine e del ballast mentre il terreno è descritto mediante un modello a due strati.

Inoltre, il metodo di calcolo è in grado di tenere conto anche della possibile presenza di tappetini isolanti interposti tra rotaie e traversine.

I confronti tra il metodo proposto ed il metodo BEM descritto in [6], [7] mostrano un accordo accettabile per quanto riguarda la conduttanza p.u.l. della rotaia verso terra; invece, per quanto riguarda la conduttanza mutua p.u.l. tra le rotaie, esistono differenze significative.

Tuttavia, bisogna ricordare che la quota di corrente di trazione di ritorno presente nel terreno e le correnti va-

condizioni than in intermediate or damp conditions; in fact, if we consider the ratio τ between the values of G_0 obtained when $\rho_1=\rho_2=10\Omega m$ and when $\rho_1=\rho_2=10000\Omega m$ (i.e. the ratio of values obtained in correspondence of extreme values of soil resistivity) one gets:

- $\tau=2.55$ in dry conditions;
- $\tau=36.31$ in intermediate conditions;
- $\tau=163$ in damp conditions.

3.4. Influence of the first layer soil thickness

In this paragraph, we present some results obtained by varying the thickness Δ of the first layer soil. In Figs. 6a and 6b, the values of G_0 versus the thickness Δ are shown in different environmental conditions. As far as the soil resistivity is concerned, we have considered two cases.

a) $\rho_1=100\Omega m$ and $\rho_2=1000\Omega m$;

b) $\rho_1=1000\Omega m$ and $\rho_2=100\Omega m$.

By looking at Figs. 6 we can make the following remarks:

- 1) As expected, in case a), by increasing the thickness of the first layer soil (having smaller resistivity) the p.u.l. rail conductance G_0 increases; the converse is true for case b) where the first soil layer has higher resistivity.
- 2) The influence of the thickness of the first layer soil is practically negligible in dry conditions.

4. Conclusions

We have presented a simplified analytical method for the calculation of the p.u.l. conductance to earth of the

ganti sono essenzialmente legate alla conduttanza p.u.l. della rotaia verso terra e non alla conduttanza mutua p.u.l. tra le rotaie; d'altra parte, si deve anche avere a mente che gli accoppiamenti induttivo e conduttivo con strutture metalliche vicine sono strettamente legati alla quota di corrente di ritorno presente nel terreno.

Pertanto, se si è interessati al calcolo delle interferenze induttive e/o conduttive su strutture metalliche in vicinanza della linea di trazione, allora il metodo di calcolo semplificato, descritto in questo articolo, può essere un utile strumento in alternativa ad approcci più sofisticati basati sui metodi FEM o BEM.

Al contrario, se si è interessati a studi e analisi nell'ambito di problematiche legate al segnalamento, tramite circuiti di binario, allora la conduttanza mutua tra le rotaie p.u.l. è un importante e significativo parametro e, in questo caso, i metodi summenzionati basati su FEM o BEM sono strettamente necessari.

Infine, è necessario rimarcare che le formule ed i risultati qui presentati sono applicabili essenzialmente in situazioni ove non vi siano particolari ambienti infrastrutturali quali gallerie, viadotti, ecc. Lo studio di questi casi specifici è al di fuori degli scopi di questo articolo.

Appendice

Questa Appendice è dedicata alla derivazione delle formule (14) e (15) riguardanti i coefficienti di potenziale p.u.l. della rotaia (auto e mutuo) con particolare riferimento al contributo del terreno. La derivazione è basata su quanto esposto in [13] e [17].

A tal proposito, modellizziamo la rotaia come un conduttore infinitamente lungo posto alla superficie del terreno che è rappresentato dal piano xy (si veda Fig. A1).

La rotaia, disposta lungo l'asse x, è caratterizzata da una corrente dispersa p.u.l. $I_d(x)$; al fine di ricavare le formule per i coefficienti di potenziale p.u.l., è dapprima necessario valutare il potenziale V generato dalla corrente

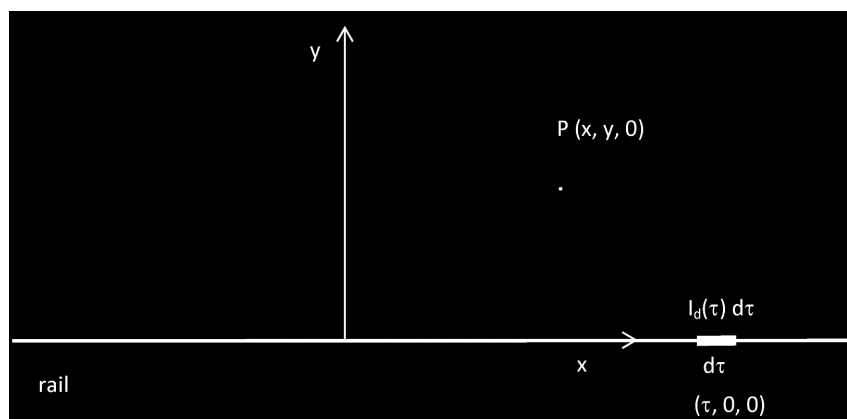


Figura A1 - Rappresentazione schematica di una rotaia posta alla superficie del terreno.

Figure A1 - Sketch of a rail placed at the soil surface.

rails. It considers the presence of sleepers and ballast while the earth is represented by a two layer soil model.

Moreover, the calculation method can also take into account of the possible presence of insulating mats interposed between rails and sleepers.

Comparisons between the proposed method and the BEM method described in [6], [7] show an acceptable agreement as far the p.u.l. rail conductance to earth is concerned; on the contrary, significant differences exist when dealing with the p.u.l. mutual conductance between rails.

Nevertheless, one has to bear in mind that the traction return current through earth and stray current are mainly related to the p.u.l. rail conductance to earth and not to the p.u.l. mutual conductance between rails; on the other hand, one has also to remind that inductive and conductive coupling on nearby metallic structures are strictly related to the part of traction current that returns through the earth.

Hence, if one is interested in estimating the inductive and/or conductive interference on metallic structures nearby located the traction line, then the simplified calculation method, described in this paper, can be an useful alternative tool to more sophisticated approaches based on BEM or FEM.

On the contrary, if one is interested in studies and analysis aimed to signalling problems by means of track circuits, then the p.u.l. mutual conductance between rails is an important and influencing parameter and, in this case, the above mentioned methods based on BEM or FEM are strictly needed.

Finally, it is necessary to remark that the formulas and the results here presented are mainly applicable to situations where there are no particular infrastructural environments such as tunnels, viaducts, etc. The study of these specific cases is outside the scope of this paper.

Appendix

This appendix is devoted to the derivation of formulas (14) and (15) dealing with the self and mutual p.u.l. coefficient of potential of the rail with particular reference to the contribution of the earth. The derivation is based on the contents of [13] and [17].

To this purpose, we model the rail by an infinitely long conductor placed at the soil surface represented by the xy plane (see Fig. A1).

The rail, disposed along the x-axis, is characterized by a p.u.l. leakage current $I_d(x)$; in order to obtain the formulas for the p.u.l. coefficients of potential, it is first necessary to evaluate the potential V generated by the rail leak-

dispersa da parte della rotaia in un generico punto $P(x, y, 0)$ posto alla superficie del terreno.

Un elemento infinitesimale di rotaia, di lunghezza $d\tau$ e posto in $(\tau, 0, 0)$, genera in P un potenziale dV dato da:

$$dV(x, y, 0) = \frac{I_d(\tau)d\tau}{2\pi\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}}{2\Delta}} \right] \quad (A1)$$

Integrando sull'intera lunghezza della rotaia, si ottiene il potenziale $V(x, y, 0)$ cioè:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_d(\tau)}{2\pi\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}}{2\Delta}} \right] d\tau \quad (A2)$$

Consideriamo la trasformata di Fourier della corrente dispersa p.u.l. $I_d(\tau)$:

$$I_d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{ju\tau} du \quad (A3)$$

Sostituendo la (A3) nella (A2) ed introducendo la nuova variabile v definita come:

$$v = \tau - x \quad (A4)$$

La formula (A2) può essere scritta come:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{juv}}{2\pi\sqrt{v^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{v^2+y^2}}{2\Delta}} \right] dv \right\} du \quad (A5)$$

In accordo con [13], l'espressione tra parentesi graffe all'interno della formula (A5) può essere espressa in forma chiusa per mezzo di K_0 ovvero la funzione di Bessel modificata di secondo tipo ed ordine 0. Quindi, la formula (A5) diviene:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(uy) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + u^2} \right) \right\} du \quad (A6)$$

La semplificazione fondamentale introdotta da Sunde nella formula (A6) è che, nella parte importante dell'intervallo di integrazione, l'espressione tra parentesi graffe viene approssimata dalla stessa espressione valutata in corrispondenza di un opportuno valore per u che è dato dalla soluzione della equazione (18) al par. 2.5. Detto Γ tale valore, la (A6) è approssimata da:

$$V(x, y, 0) = \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma y) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + \Gamma^2} \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} du \quad (A7)$$

O, equivalentemente, ricordando la (A3), si ha:

$$V(x, y, 0) = \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma y) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + \Gamma^2} \right) \right\} I_d(x) \quad (A8)$$

Ricordando che il rapporto tra $V(x, y, 0)$ e $I_d(x)$ è proprio il coefficiente di potenziale p.u.l., infine si ottiene:

age current in a generic point $P(x, y, 0)$ placed at the soil surface.

The infinitesimal element of rail, having length $d\tau$ and placed in $(\tau, 0, 0)$, generates in P a potential dV given by:

$$dV(x, y, 0) = \frac{I_d(\tau)d\tau}{2\pi\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}}{2\Delta}} \right] \quad (A1)$$

By integrating over the whole rail length, one obtains the potential $V(x, y, 0)$ i.e.:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_d(\tau)}{2\pi\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{(x-\tau)^2+y^2}}{2\Delta}} \right] d\tau \quad (A2)$$

Let us consider the Fourier transform of the p.u.l leakage current $I_d(\tau)$:

$$I_d(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{ju\tau} du \quad (A3)$$

By substituting (A3) into (A2) and introducing the new variable v defined as:

$$v = \tau - x \quad (A4)$$

formula (A2) can be written as:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{juv}}{2\pi\sqrt{v^2+y^2}} \left[\rho_2 + (\rho_2 - \rho_1)e^{-\frac{\eta\sqrt{v^2+y^2}}{2\Delta}} \right] dv \right\} du \quad (A5)$$

According to [13], the expression into braces inside formula (A5) can be expressed in closed form by means of K_0 i.e. the modified Bessel function of second kind and order 0. Hence formula (A5) becomes:

$$V(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(uy) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + u^2} \right) \right\} du \quad (A6)$$

The basic simplification introduced by Sunde in formula (A6) is that, in the important part of the integration range, the expression into braces can be approximated by the same expression evaluated for a suitable value for u given by the solution of equation (18) in par. 2.5. So, if Γ is such a value, (A6) is approximated by:

$$V(x, y, 0) = \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma y) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + \Gamma^2} \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} h_d(u)e^{juv} du \quad (A7)$$

Or equivalently, by remembering (A3), one has:

$$V(x, y, 0) = \left\{ \frac{\rho_2}{\pi} K_0(\Gamma y) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\pi} K_0 \left(y \sqrt{\left(\frac{\eta}{2\Delta} \right)^2 + \Gamma^2} \right) \right\} I_d(x) \quad (A8)$$

By reminding that the ratio between $V(x, y, 0)$ and $I_d(x)$ is just the p.u.l. coefficient of potential, one finally gets:

- $w_{11 \text{ earth}} = w_{22 \text{ earth}}$ se, in formula (A8) si pone $y = r_{eq}$ ottenendo così la formula (14)
- $w_{12 \text{ earth}} = w_{21 \text{ earth}}$ se, in formula (A8) si pone $y = D_r$ ottenendo così la formula (15)
- $w_{11 \text{ earth}} = w_{22 \text{ earth}}$ if, inside formula (A8) one puts $y = r_{eq}$ so obtaining formula (14)
- $w_{12 \text{ earth}} = w_{21 \text{ earth}}$ if, inside formula (A8) one puts $y = D_r$ so obtaining formula (15)

BIBLIOGRAFIA - REFERENCES

- [1] ITU-T, (1989), "Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines". Volume IV: "Inducing-currents and voltages in electrified railway systems", ITU Geneva.
- [2] G. GUIDI BUFFARINI, (2000), "Modello multiconduttore per il calcolo delle correnti disperse nella trazione a c.c.", Ingegneria Ferroviaria, 12, pp. 783-793.
- [3] A. MARISCOTTI, (2003), "Distribution of the traction Return Current in AC and DC Electric Railway Systems", IEEE Trans. on Power Delivery, vol.18, No. 4, October.
- [4] R. J. HILL, S. BRILLANTE, P. J. LEONARD, (2000), "Railway track transmission line parameters from finite element modelling: Shunt admittance", IEE Proc. Electr. Power Appl, 147, (3), pp. 227-238.
- [5] L. TENG, W. MINGLI, H. FAN et al., (2013), "Finite element calculation of leakage resistance and distributed capacitance of rail to earth in ballastless track". IPST 2013 Proc. Int. Conf. On Power Systems Transients, Vancouver, Canada, July.
- [6] G. LUCCA, (2017), "Railway track transmission line model: calculation of rail conductance by means of boundary element method", IET Science, Measurement & Technology, vol. 11, no. 8, pp. 976-982.
- [7] G. LUCCA, (2017), "Evaluation of rail conductances", Ingegneria Ferroviaria, 12, pp. 935-949.
- [8] ORE, (1973) "Question A 122 Application of thyristors in railway technology: Consequences and remedies', Report no.9, 'Study of the effect of interference on track circuits" (ORE-UIC,).
- [9] A. MARISCOTTI, P. POZZOBON, (2005), "Experimental Results on Low Rail-to-Rail Conductance Values", IEEE Trans. on Vehicular Technology, 54, (3), pp. 1219-1222.
- [10] ITU-T, (1989), "Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines". Volume III: "Capacitive, inductive and conductive coupling: physical theory and calculation methods", ITU Geneva.
- [11] S. BOBBIO, E. GATTI, (1984), "Elementi di elettromagnetismo", Boringhieri.
- [12] R. J. HILL, P. POZZOBON, (1997), "Fuzzy identification of rail track parameters", Proceedings of the IEEE/ASME Joint Railroad Conference March 18-20, Boston, USA, pp. 11-20.
- [13] E. D. SUNDE, (1949), 'Earth Conduction Effects in Transmission Systems', D. Van Nostrand, 1st edn.
- [14] P. CESARIO, P. O. VENTURA, (1996), "Il calcolo delle impedenze nelle alimentazioni della trazione elettrica", Ingegneria Ferroviaria, 9, pp. 626-642.
- [15] A. OGUNSOLA, A. MARISCOTTI, "Electromagnetic Compatibility in Railways - Analysis and Management", (Springer 2013), pp. 420-422.
- [16] R. J. HILL, , S. BRILLANTE, C. R. DE SOUZA, et al., (1999), 'Electrical material data for railway track transmission line parameter studies', IEE Proc. Electr. Power Appl, 146, (1), pp. 60-68.
- [17] EPRI (Electric Power Research Institute) Report EL-3106, Vol.1, (1983), "Power Line-Induced AC Potential on Natural Gas Pipelines for Complex Rights-of-Way Configurations", May.