



Oscillazioni periodiche di equilibrio nei processi di diffusione delle innovazioni nei trasporti

Periodic equilibrium oscillations in the diffusion processes of transport innovations

Paolo FERRARI

(<https://www.medra.org/servlet/view?lang=it&doi=10.57597/IF.9.2022.ART.1>)

Sommario - Accade spesso che l'introduzione di una innovazione nel mondo dei trasporti non sia accompagnata dall'adeguamento delle sue caratteristiche all'aumento delle sue utilizzazioni, e ciò causa congestione. Mentre il progressivo adeguamento delle caratteristiche darebbe luogo ad una evoluzione nel tempo della proporzione di utilizzazioni che segue la curva ad S tipica delle innovazioni, il mancato adeguamento causa l'interruzione di questa evoluzione, dando luogo ad un'altra evoluzione, la quale si distacca dalla prima quando il livello di congestione diviene intollerabile dagli utilizzatori e raggiunge, dopo un periodo di transizione, uno stato di equilibrio individuato da una serie di oscillazioni intorno ad un valore medio alquanto inferiore al valore asintotico della curva ad S.

1. Introduzione

In tempi recenti molta letteratura è stata dedicata alle innovazioni nei trasporti, in particolare al contributo che le innovazioni possono dare alla sostenibilità dei trasporti. Sono state studiate sia le innovazioni che derivano da R&S [3][7][19][27] sia quelle che nascono dal basso, innescate da utenti individuali o comunità che cercano una soluzione a problemi individuali o sociali [15][20][23][25]. È stato studiato il contributo delle innovazioni alle varie componenti della sostenibilità, in particolare al risparmio energetico [9]. Si è cercato di individuare le aree di innovazioni più utili alla sostenibilità dei trasporti [16].

Considerando le innovazioni nei trasporti da un punto di vista generale, possiamo suddividerle in radicali e incrementali (una terminologia questa ampiamente utilizzata in *management sciences* [8][10]). Le prime sono caratterizzate da sostanziali modifiche nella tecnologia e/o nella organizzazione del trasporto, che danno luogo ad una nuova tipologia di trasporto la quale, almeno per alcune aree della domanda, fornisce prestazioni molto più favorevoli rispetto all'offerta di trasporto tradizionale dominante, con la quale entra in competizione. Invece le innovazioni incrementali rappresentano modifiche progressive nel tempo dell'offerta tradizionale che viene migliorata ma non sostanzialmente modificata.

Summary - It often happens that the introduction of an innovation in the transport world is not accompanied by the adjustment of its characteristics to the increase in its utilizations, and that causes congestion. While the progressive adjustment of the characteristics would give rise to an evolution over time that follows the S curve typical of innovations, the failure to adjust causes the interruption of this evolution giving rise to another evolution, which departs from the first when the congestion level becomes unacceptable by users, and reaches, after a period of transition, an equilibrium state represented by a series of periodic oscillations around an average value somewhat less than the asymptotic value of the S curve.

1. Introduction

In recent times a lot of literature has been dedicated to innovations in transport, particularly to the contribution that innovations could give to the sustainability of transport. Both the innovations deriving from R&D [3][7][19][27] and the bottom-up grass innovations, i.e. those triggered by individual users or communities seeking a solution to a personal or social problem [15][20][23][25] have been studied. The contribution of innovations to transport sustainability, in particular to energy saving, has been analysed [9]. Researches have been dedicated to identify the areas of innovations more useful to transport sustainability [16].

If we consider transport innovations from a general point of view, we can divide them in radical and incremental (this terminology is widely used in *management sciences* [8][10]). The first are characterised by substantial modifications in technology and/or organization of transport, giving rise to a new typology of transport, which causes, at least in some areas of demand, performance much more favourable than the traditional transport supply, with which it enters in competition. Instead the incremental innovations represent progressive changes over time of the traditional transport supply, which is improved but not substantially modified.

The radical innovations can concern the infrastructure, the transport organization, the vehicle propulsion. An example of infrastructure innovation was the motorway, which

Le innovazioni radicali possono riguardare l'infrastruttura, il tipo di organizzazione del trasporto, il tipo di propulsione dei veicoli. Esempio di innovazione radicale nell'infrastruttura è stata l'autostrada, introdotta intorno alla metà del secolo scorso in competizione con la ferrovia; esempio di innovazione nella organizzazione del trasporto è il trasporto intermodale introdotto in competizione con il trasporto stradale delle merci; esempio di innovazione nella propulsione dei veicoli è l'auto elettrica introdotta recentemente in competizione con la tecnologia dominante costituita dall'auto con motore a combustione interna (MCI).

Se una innovazione radicale ha successo e le condizioni generali dell'economia sono buone, il nuovo tipo di trasporto attira una proporzione di domanda crescente nel tempo. Se le caratteristiche del nuovo tipo di trasporto non vengono adeguate a questo incremento di domanda si crea congestione, la quale modifica l'evoluzione nel tempo delle prestazioni del sistema, dando luogo ad una forma di equilibrio caratterizzata da oscillazioni periodiche, intorno ad un valore medio costante nel tempo, della proporzione di domanda attratta. Lo studio di questo particolare tipo di equilibrio è lo scopo di questo articolo.

Consideriamo un ambiente in cui viene offerta agli utenti una modalità di trasporto costituita da una innovazione radicale in competizione con quella tradizionale dominante, ed un individuo che deve fare una scelta fra le due: per esempio un automobilista che ai giorni nostri intende comperare un'auto e deve scegliere tra quella elettrica innovativa e quella tradizionale MCI dominante; oppure uno spedizioniere che, in un'epoca come quella dei primi decenni della seconda metà del secolo scorso, deve effettuare una spedizione e deve decidere se usare l'autostrada (modo di trasporto innovativo) o la ferrovia (modo di trasporto tradizionale a quell'epoca dominante). Egli valuta vantaggi e svantaggi di ciascuna alternativa ponendoli a confronto con quelli dell'altra. In questa valutazione intervengono numerosi fattori, alcuni dei quali dipendenti dalle caratteristiche dell'innovazione e da quelle degli utenti, altri riguardanti per esempio l'atteggiamento delle Pubbliche Amministrazioni, che potrebbero essere particolarmente favorevoli ad una alternativa, o quello dei mass media. Possiamo immaginare che ciascun decisore sintetizzi le sue valutazioni attribuendo un numero a ciascuna alternativa: più alto è il numero meno preferibile è l'alternativa.

La diffusione di una innovazione, cioè il numero di utilizzi (numero di auto vendute o numero di tonnellate trasportate) in un dato intervallo di tempo, è caratterizzata dall'incertezza dei potenziali utilizzatori [18][24], dovuta essenzialmente alla mancanza di conoscenza delle sue potenzialità e della sua capacità di soddisfare le esigenze di chi la utilizza. L'incertezza è massima al tempo in cui l'innovazione viene introdotta, e diminuisce con la diffusione di quest'ultima, perché contemporaneamente cresce la conoscenza delle sue potenzialità, acquisita attraverso le opinioni di coloro che la utilizzano [22]. Data la gene-

was introduced, around the middle of the last century, in competition with the railway; an example of innovation in transport organization is the intermodal transport, introduced in competition with the road transport of goods; an example of propulsion innovation is the electric car, introduced recently in competition with the dominant car technology, constituted by cars with Internal Combustion Engine (ICE).

If a radical innovation in transport is successful, and the general conditions of economy are good, the new typology of transport attracts an increasing proportion of demand. If the characteristics of the new typology of transport fail to be adjusted to the increase in demand, congestion occurs, which modifies the evolution over time of the performance of the system, giving rise to a form of equilibrium that is characterised by periodic oscillations around an average value, constant over time. The study of this particular form of equilibrium is the subject of this paper.

Consider an environment in which a mode of transport is offered to users, constituted by a radical innovation in competition with the traditional dominant one, and a person who has to make a choice between the two: e.g. a motorist who intends to buy a car these days and has to choose between the innovative electric car and the dominant ICE car; or a carrier who, in an epoch like that of the first decades of the last century, intends to make a shipment and has to decide whether to use the motorway (innovative mode of transport) or the railway (traditional mode of transport, dominant at that epoch). He evaluates advantages and disadvantages of each alternative, and compares them with those of the other. Many factors intervene in this evaluations, some of them depending on the characteristics of the innovation and those of users, others concerning e.g. the attitude of Public Administrations that could be particularly favourable to an alternative, or that of mass media. We can imagine that each decision maker summarizes his evaluations by assigning a number to each alternative: the higher the number is, the less preferable the alternative is.

The diffusion of an innovation, i.e. the number of its utilizations (number of cars sold or number of tons carried), in a given time interval, is characterized by the uncertainty of potential users [18][24], which is due essentially to lack of knowledge about the potential of the new product and its ability to meet the needs of those who use it. Uncertainty is maximum at time when the innovation is introduced, and decreases as the diffusion of the latter increases, for at the same time the knowledge of its potential grows, acquired through the opinions of those who use it [22]. Given the general risk aversion, the potential user tends to attribute a higher number the greater uncertainty, and thus insecurity in his evaluations, is.

Then he compares the two alternatives and chooses the one to which he attributed the lowest number. The numbers attributed to the two alternatives are the determinations of two random variables, as the evaluation varies randomly on the population of users, depending on the characteristics of each of them, and on those of the surrounding environment as well. We define the averages of these two random vari-

rale avversione al rischio, il potenziale utilizzatore tende ad attribuire a ciascuna alternativa un numero tanto più elevato quanto maggiore è l'incertezza, e quindi l'insicurezza nelle sue valutazioni.

Egli pone quindi a confronto le due alternative e sceglie quella a cui ha attribuito il numero più basso. I numeri attribuiti alle due alternative sono le determinazioni di due variabili aleatorie, poiché la valutazione varia in maniera casuale nella popolazione degli utilizzatori, dipendendo dalle caratteristiche di ciascuno e anche da quelle dell'ambiente circostante. Definiamo le medie di queste due variabili aleatorie "costo" di ciascuna alternativa. Poiché, come si è detto, il costo aumenta con l'incertezza, e d'altra parte quest'ultima diminuisce al crescere della diffusione della alternativa, il costo è una funzione decrescente della diffusione di ciascuna alternativa, che denominiamo "funzione di costo".

Dobbiamo però tener presente che l'incertezza non deriva soltanto dalla mancanza di conoscenza delle potenzialità dell'alternativa innovativa, ma riguarda anche il futuro, dovuta essenzialmente alla scarsa fiducia nella sua affidabilità nel tempo. Accade quindi che solo una parte di coloro che ritengono l'alternativa innovativa preferibile all'altra, in base alla conoscenza delle potenzialità di entrambe, effettivamente la adottano.

Come si è visto, l'incertezza diminuisce all'aumentare del numero di utilizzi di una innovazione, e con essa diminuisce il costo. Da ciò deriva, come è spiegato in [13], che l'andamento della diffusione di una innovazione nel tempo segue generalmente una curva ad S, la quale è costituita da un primo tratto in cui il tasso di crescita è molto modesto, seguito da una svolta improvvisa che dà luogo ad un tratto della curva in cui il tasso di crescita aumenta notevolmente nel tempo, per poi diminuire progressivamente. Tuttavia la diminuzione del costo di una innovazione al crescere della sua diffusione – come conseguenza della diminuzione dell'incertezza – richiede che le caratteristiche dell'innovazione vengano adeguate all'aumento dei suoi utilizzi: adeguamento della geometria di una autostrada all'aumentare del traffico, aumento dell'offerta di energia elettrica e del numero di stazioni di ricarica al crescere del numero di vendite annue di auto elettriche.

Se ciò non avviene si verifica congestione: aumento dei tempi di percorrenza in autostrada, e lunghe code con condizioni di *stop-and-go*; frequenti *black-out* elettrico e code alle stazioni di ricarica per le auto elettriche. Accade quindi che, superato un certo livello di diffusione, il costo attribuito dagli utilizzatori alla innovazione cominci ad aumentare, raggiungendo rapidamente valori molto elevati. Ciò provoca il trasferimento di una parte degli utilizzi dalla tipologia di trasporto innovativa a quella tradizionale, il che determina la diminuzione del numero di utilizzi della tipologia innovativa, e quindi del suo costo. Ne deriva in un tempo successivo il trasferimento di una parte di utilizzi dalla tipologia tradizionale a quella innovativa, a cui segue di nuovo un aumento del costo di quest'ultima, e così via ripetutamente. La conseguenza è che lo

ables "cost" of each alternative. Since, as we said above, cost increase with the uncertainty and, on the other hand, the latter decreases as the diffusion of the alternatives increase, cost is a decreasing function of the diffusion of each alternative, which we name "cost function".

However we should consider that uncertainty is due not only to lack of knowledge of the potential of the innovative alternative, but it also concerns the future, due essentially to low confidence in its reliability over time. Therefore it happens that only a fraction of those who think that the innovative alternative is preferable to the other, on the basis of the knowledge of its potential, actually uses it.

As we have seen, uncertainty decreases as the number of utilizations of an alternative increases, and cost decreases correspondingly. It follows, as explained in [13], that the pattern of the diffusion over time follows in general an S-shaped curve, which is constituted by a first section whose growth rate is very low, followed by a tipping point that gives rise to a section of the curve whose growth rate significantly increases over time, and then diminishes progressively. However the decrease in the cost of an innovation, as its diffusion increases, requires that the innovation characteristics match the increase in its utilizations: upgrading the geometry of a motorway as traffic grows, increasing the supply of electric energy and the number of charging stations as the number of yearly electric car sales increases.

If this does not happen there is congestion: increase in travel time, long queues and conditions of stop-and-go on motorways; frequent electric black-out and queues at charging stations for electric cars. Thus it happens that, when a certain level of diffusion is reached, the cost attributed by users to the innovation begins to increase, reaching quickly very high values. This causes the transfer of a fraction of utilizations from the innovative transport typology to the traditional one, which causes the decrease in the number of utilizations of the innovative typology, and thus in its cost. In a successive time, the transfer of a fraction of utilizations from the traditional typology to the innovative one occurs, which again causes an increase in the cost of the latter, and so on repeatedly. It follows that the equilibrium state of the system is characterized by a sequence of periodic oscillations of the proportions of the innovative alternative around an average value constant over time.

An example of this state of equilibrium is given by Fig. 1, which shows the pattern – between 1994 and 2014 – of the proportion of tons of goods carried yearly on motorway to the total of goods carried at the Brenner pass, obtained from the data given by ALPINFO [4].

The Brenner motorway, which entered into operation in 1974, has kept unchanged up to now its original geometric characteristics – two unidirectional carriageways with two lanes per carriageway – while the freight traffic has been increasing significantly over time. This has caused high level of congestion, which it was tried to cope with, with only partial success, introducing various systems of traffic control, until the recent proposal to request a reservation from

stato di equilibrio del sistema di trasporto è caratterizzato da una sequenza di oscillazioni periodiche della proporzione di utilizzi della alternativa innovativa intorno ad un valore medio costante nel tempo.

Un esempio di questo stato di equilibrio è dato dalla Fig. 1, la quale mostra l'andamento, fra il 1994 e il 2014, della proporzione, rispetto al totale delle tonnellate di merci trasportate annualmente al valico del Brennero, delle tonnellate trasportate in autostrada, ricavato dai dati forniti da ALPINFO [4].

L'autostrada del Brennero, entrata in esercizio nel 1974, ha mantenuto inalterate fino ad oggi le sue caratteristiche geometriche originarie - sezione a doppia carreggiata con due corsie per carreggiata - mentre il traffico merci è andato aumentando notevolmente nel tempo. Ciò ha prodotto elevati livelli di congestione, a cui si è cercato di far fronte, con successo soltanto parziale, introducendo diversi sistemi di controllo del traffico, fino alla recente proposta di richiedere la prenotazione da parte dei trasportatori per l'accesso all'autostrada. Da questa congestione derivano oscillazioni periodiche dell'equilibrio, come quelle osservate in Fig. 1 intorno ad un valore medio di 0,714.

È senz'altro possibile che le oscillazioni rappresentate in Fig. 1 siano dovute anche ad altri fattori. Tra questi qualcuno ad esempio ha indicato la variazione dell'offerta di trasporto su rotaia, le oscillazioni del prezzo del gasolio, le restrizioni imposte dal governo austriaco al transito delle merci via strada. Si deve però osservare che, mentre nelle sezioni successive dell'articolo si dimostra che la congestione sull'autostrada, documentata con certezza, dà luogo a fluttuazioni periodiche dei costi da cui derivano oscillazioni periodiche dell'equilibrio, il fatto che altri fattori, come quelli prima citati, diano luogo a fluttuazioni periodiche dell'equilibrio, è solo una congettura che avrebbe bisogno di essere dimostrata.

Un ruolo fondamentale nel determinare le caratteristiche dell'equilibrio è giocato dalla rapidità con cui gli utilizzi vengono spostati da una alternativa all'altra giudicata preferibile. Come vedremo più avanti, quando la percentuale di utilizzi che in un dato intervallo di tempo vengono spostati da una alternativa all'altra è bassa, le oscillazioni, dopo un breve periodo di transizione, tendono a scomparire. Invece, quando questa percentuale è alta, sia l'ampiezza delle oscillazioni sia quella del periodo diventano molto elevate.

Nella prossima Sezione viene presentato un modello di studio delle forme di equilibrio periodico nei proces-

the carriers to access the motorway. Periodic oscillations of equilibrium around an average value of 0.714, as those observed in Fig. 1, derive from this congestion.

It is certainly possible that the oscillations represented in Fig. 1 are due also to other factors. Among these, as an example, someone has indicated the variation in the supply of rail transport; the fluctuations in the price of diesel fuel; the restrictions imposed by the Austrian government on road traffic of goods. However we should observe that, while we'll prove in the successive Sections of the paper that the congestion on the motorway, which is documented with certainty, gives rise to periodic oscillations of the costs from which periodic oscillations of equilibrium derive, the fact that other factors, like those mentioned above, give rise to periodic fluctuations of equilibrium, is only a conjecture that should be proved.

A substantial role in determining the equilibrium characteristics is played by the quickness with which the utilizations move from an alternative to the other considered preferable. As we'll see later, when the proportion of utilizations that in a given time interval moves from an alternative to the other is low, the oscillations, after a short period of transition tend to disappear. Instead, when this proportion is high, the amplitude of both the oscillations and the periods, become very high.

A model to study the forms of periodic equilibrium in the processes of diffusion of innovations in the transport world is proposed in the next Section. An application of the model is presented, as a study case, in Section 3, in which the various forms of periodic equilibrium in the diffusion processes of electric cars are studied. Lastly, a brief summary of the main points is presented, and some conclusions are put forward in Section 4.

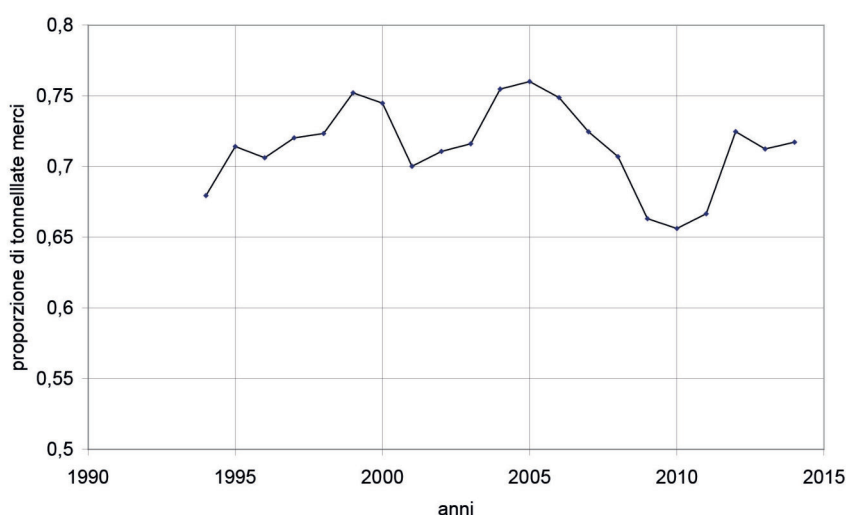


Figura 1 – Proporzione, rispetto al totale delle tonnellate di merci trasportate annualmente al valico del Brennero, delle tonnellate trasportate in autostrada. Figure 1 – Proportions of tons of goods carried yearly on motorway to the total of goods carried through the Brenner pass.

si di diffusione delle innovazioni nel mondo dei trasporti. Una applicazione del modello è presentata, come caso di studio, nella Sezione 3, nella quale sono analizzate le diverse possibili forme di equilibrio periodico nei processi di diffusione dell'auto elettrica. Infine nella Sezione 4 è presentato un sommario dei punti principali e sono avanzate alcune conclusioni.

2. Un modello per lo studio delle forme di equilibrio periodico nei processi di diffusione delle innovazioni nel mondo dei trasporti

Consideriamo un territorio in cui due alternative di trasporto vengono offerte agli utilizzatori, una tradizionale e l'altra innovativa: per esempio ferrovia e autostrada, ovvero auto MCI e auto elettrica. Il modello studia l'evoluzione della proporzione di utilizzi di ciascuna alternativa durante una sequenza Σ di intervalli temporali (per esempio un anno), i cui numeri d'ordine individuano la sequenza dei tempi t . Supponiamo che il numero T^t di utilizzi in un intervallo di tempo al tempo t nell'insieme delle due alternative (per esempio numero di tonnellate di merce trasportate su ferrovia e in autostrada, o numero di auto vendute in un anno) aumenti nel tempo col tasso r^t , tendendo ad un valore asintotico K . Il tasso r^t diminuisce al crescere di T^t , e tende a zero quando T^t si approssima a K . Indicando con \bar{r} il valore iniziale di r^t corrispondente ad un valore nullo di T^t , si ha che l'evoluzione nel tempo di T^t è fornita dalla seguente equazione:

$$T^{t+1} = T^t [1 + \bar{r}(1 - T^t / K)] \quad (1)$$

Etichettando con **1** l'alternativa tradizionale e con **2** quella innovativa, indichiamo con x_1^t e x_2^t le proporzioni di T^t al tempo t composte dagli utilizzi dell'alternativa tradizionale e di quella innovativa, rispettivamente, per cui i corrispondenti numeri di utilizzi sono $x_1^t T^t$ e $x_2^t T^t$.

Come si è visto nella Sezione precedente, supponiamo che uno spedizioniere che intende fare una spedizione, o un individuo che intende comprare un'auto, pone a confronto l'alternativa innovativa con quella tradizionale (autostrada contro ferrovia, auto elettrica contro auto a combustione interna), e sintetizza le sue valutazioni attribuendo un numero a ciascuna alternativa: più alto è il numero, meno preferibile è l'alternativa. Sceglie quindi l'alternativa alla quale ha attribuito il numero più basso. Poiché le valutazioni sono disperse nella popolazione dei potenziali utilizzatori, dipendendo dalle loro caratteristiche psicologiche e socio-economiche, e anche dall'ambiente circostante, i numeri attribuiti alle alternative sono variabili aleatorie, le cui medie indichiamo con C_1 e C_2 , che definiamo "costo" per l'alternativa tradizionale e innovativa, rispettivamente. Supponendo che le due variabili aleatorie siano variabili di Gumbel con parametro di scala uguale a 1, si è provato in [13] che la probabilità che al tempo t venga scelta l'alternativa innovativa è data da:

2. A model to study the forms of periodic equilibrium in the diffusion processes of innovations in the transport world

Consider a territory in which two transport alternatives are provided to users: one traditional and the other innovative: e.g. railway and motorway, or MCI car and electric car. The model studies the evolution of the proportion of utilizations of each alternative during a sequence Σ of unit time intervals (e.g. one year), whose order numbers identify the sequence of times. Suppose that the number T^t of utilizations in a unit time interval at time t of the two alternatives as a whole (e.g. the number of tons of goods carried or the number of cars sold in one year) increases over time with rate r^t , tending to an asymptotic value K . Rate r^t decreases as T^t increases, and it tends to zero when T^t approaches K . By denoting \bar{r} the starting value of r^t , corresponding to zero value of T^t , we have that the evolution over time of T^t is given by the following equation:

$$T^{t+1} = T^t [1 + \bar{r}(1 - T^t / K)] \quad (1)$$

Labelling with **1** the traditional alternative and with **2** the innovative one, we denote x_1^t and x_2^t the proportions of T^t at time t composed by traditional and innovative utilizations, respectively, so that the corresponding number of utilizations are $x_1^t T^t$ and $x_2^t T^t$.

As we have seen in the previous Section, we suppose that a carrier, who intends to make a shipment, or a person who intends to buy a car, compares the innovative alternative with the traditional one (motorway versus railway, electric car versus ICE car), and he summarizes his evaluations by assigning a number to each alternative: the higher the number is, the less preferable the alternative is. Then he chooses the one to which he attributed the lowest number. As the evaluations are dispersed in the population of potential users, depending on their psychological and socio-economic characteristics, and on the surrounding environment as well, the numbers attributed to the alternatives are random variables, whose averages we denote as C_1 and C_2 , which we define as "cost" for the traditional and innovative alternative, respectively. Supposing that the two random variables are Gumbel variables with scale parameter equal to 1, it has been proved in [13] that the probability that the innovative alternative is chosen at time t is:

$$P_2^t = \frac{1}{1 + \exp(C_2^t - C_1^t)} \quad (2)$$

As we have seen in the previous Section, the number attributed to each of the two alternatives by a potential user is higher the greater uncertainty is, and on the other hand uncertainty relative to each alternative decreases as its diffusion, i.e. the number of utilizations in a given time interval, grows. Since potential users do not know the number of utilizations that will be occur in the year when they make their choice, the model assumes that uncertainty that

$$P_2^t = \frac{1}{1 + \exp(C_2^t - C_1^t)} \quad (2)$$

Come si è visto nella Sezione precedente, il numero attribuito a ciascuna delle due alternative da un potenziale utilizzatore è tanto più elevato quanto maggiore è l'incertezza, e d'altra parte l'incertezza relativa a ciascuna alternativa diminuisce con la sua diffusione, cioè con il numero di utilizzi in un dato intervallo di tempo. Poiché i potenziali utilizzatori non conoscono il numero di utilizzi che si verificheranno nell'anno in cui fanno la loro scelta, il modello assume che l'incertezza che accompagna le valutazioni di ciascuna alternativa è funzione decrescente del corrispondente numero di utilizzi $x_1^t T^t$ $x_2^t T^t$ che si è verificato l'anno precedente. Da ciò segue che i costi C_1^{t+1} e C_2^{t+1} al tempo $t+1$ sono funzioni decrescenti del numero di utilizzi dell'alternativa tradizionale e innovativa, rispettivamente, verificatisi al tempo t : $C_1^{t+1} = c_1(x_1^t T^t)$, $C_2^{t+1} = c_2(x_2^t T^t)$. Chiamiamo $c_1(x_1^t T^t)$ e $c_2(x_2^t T^t)$ "funzioni di costo" e, per le ragioni viste sopra, attribuiamo ad esse l'espressione di funzione esponenziale discendente:

$$c_i(x_i^t T^t) = a_{i,0} + a_{i,1} \exp(a_{i,2} x_i^t T^t) \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

dove $a_{i,2} < 0$.

Quindi si ha dalla Eq. (2) che la probabilità P_2^{t+1} che l'alternativa innovativa venga scelta al tempo $t+1$ si scrive come segue:

$$P_2^{t+1} = \frac{1}{1 + \exp[c_2(x_2^t T^t) - c_1(x_1^t T^t)]} \quad (4)$$

dove $x_1^t = 1 - x_2^t$.

Indichiamo con \bar{x}_2^t la frazione di T^{t+1} che sarebbe composta da utilizzi dell'alternativa innovativa se tutti i potenziali utilizzatori, che hanno scelto l'alternativa innovativa, effettivamente la adottassero. Considerando P_2^{t+1} una buona stima di \bar{x}_2^t , si ha dalla Eq. (4):

$$\bar{x}_2^t = \frac{1}{1 + \exp[c_2(x_2^t T^t) - c_1(x_1^t T^t)]} \quad (5)$$

Come si è visto nella Sezione 1, a causa dell'incertezza circa il futuro dell'alternativa innovativa, solo una frazione di coloro hanno scelto l'alternativa innovativa effettivamente la adottano. Ciò significa che $x_2^{t+1} - x_2^t$ è solo una frazione di $\bar{x}_2^t - x_2^t$, per cui si ha:

$$x_2^{t+1} = x_2^t + \beta(\bar{x}_2^t - x_2^t) \quad (6)$$

dove il parametro β , $0 < \beta < 1$, che supponiamo sia costante, è il rapporto tra la differenza $x_2^{t+1} - x_2^t$ delle proporzioni di utilizzi dell'alternativa innovativa ai tempi t e $t+1$ e la differenza $\bar{x}_2^t - x_2^t$ che si realizzerebbe se tutti coloro che

accompagna le valutazioni di each alternative is a decreasing function of the corresponding number of utilizations $x_1^t T^t$ and $x_2^t T^t$ occurred the previous year. It follows that costs C_1^{t+1} and C_2^{t+1} at time $t+1$ are decreasing functions of the corresponding numbers of utilizations of traditional and innovative alternatives, respectively, occurred at time t : $C_1^{t+1} = c_1(x_1^t T^t)$, $C_2^{t+1} = c_2(x_2^t T^t)$. We name $c_1(x_1^t T^t)$ and $c_2(x_2^t T^t)$ "cost functions" and, for the reasons explained above, we assign to them the expression of a decreasing exponential function:

$$c_i(x_i^t T^t) = a_{i,0} + a_{i,1} \exp(a_{i,2} x_i^t T^t) \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

where $a_{i,2} < 0$.

Thus we have from Eq. (2) that probability P_2^{t+1} that the innovative alternative is chosen at time $t+1$ is written as follows:

$$P_2^{t+1} = \frac{1}{1 + \exp[c_2(x_2^t T^t) - c_1(x_1^t T^t)]} \quad (4)$$

where $x_1^t = 1 - x_2^t$.

We denote as \bar{x}_2^t the fraction of T^{t+1} which would be composed of utilizations of the innovative alternative if all potential users, who chose the innovative alternative, actually used it. By considering P_2^{t+1} a good estimate of \bar{x}_2^t , we have from Eq. (4):

$$\bar{x}_2^t = \frac{1}{1 + \exp[c_2(x_2^t T^t) - c_1(x_1^t T^t)]} \quad (5)$$

As mentioned in Section 1, because of uncertainty, only a fraction of those who chose the innovative alternative actually use it. This means that $x_2^{t+1} - x_2^t$ is only a fraction of $\bar{x}_2^t - x_2^t$, so that we have:

$$x_2^{t+1} = x_2^t + \beta(\bar{x}_2^t - x_2^t) \quad (6)$$

where parameter β , $0 < \beta < 1$, which we suppose to be constant, is the ratio between the difference $x_2^{t+1} - x_2^t$ of the proportions of utilizations of the innovative alternative at times t and $t+1$ and the difference $\bar{x}_2^t - x_2^t$ that would occur if all who chose the innovative alternative, actually used it. β can be considered a measure of the quickness with which the transfer from an alternative to the other occurs, as a consequence of the evolution over time of costs. The higher β is, the greater the quickness is.

Consider the system of equations:

$$\begin{aligned} x_2^{t+1} &= x_2^t + \beta(\bar{x}_2^t - x_2^t) \\ T^{t+1} &= T^t [1 + \bar{r}(1 - T^t / K)] \end{aligned} \quad (7)$$

formed by Eq. (6) and Eq. (1). Its application requires the knowledge of the values of parameters \bar{r} , K and β and of

hanno scelto l'alternativa innovativa effettivamente la adottassero. β può essere considerato una misura della rapidità con cui avviene il trasferimento da un'alternativa all'altra, come conseguenza dell'evoluzione dei costi, la quale è tanto maggiore quanto più elevato è β .

Consideriamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} x_2^{t+1} &= x_2^t + \beta (\bar{x}_2^t - x_2^t) \\ T^{t+1} &= T^t \left[1 + \bar{r}(1 - T^t / K) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

formata dalla Eq. (1) e dalla Eq. (6). La sua applicazione richiede la conoscenza dei valori dei parametri \bar{r} , K e β e di quelli dei coefficienti delle funzioni di costo. Se sono note le sequenze degli utilizzi complessivi T^t delle due alternative e delle proporzioni \hat{x}_2^t di utilizzi dell'alternativa innovativa, registrate in un sequenza Σ di tempi t , a distanza per esempio di un anno, è possibile stimare i valori dei parametri \bar{r} e K minimizzando lo scarto quadratico fra i valori registrati di T^t e quelli che si ricavano dalla seconda delle Eq. (7). I valori di β e quelli dei coefficienti delle funzioni di costo possono essere stimati utilizzando il metodo proposto in [12], riassunto sinteticamente in Appendice di questo articolo.

Osserviamo che, poiché $x_1^t = 1 - x_2^t$, lo stato al tempo t del sistema che stiamo studiando è compiutamente identificato dal numero complessivo T^t di utilizzi delle due alternative e dalla proporzione x_2^t di utilizzi dell'alternativa innovativa, e quindi dal punto di coordinate x_2^t, T^t nello spazio delle fasi, che è formato dalla porzione rettangolare dell'ortante non negativo del piano (x_2, T) limitato dai lati di lunghezza $x_2 = 1$ e $T = K$. Quindi l'evoluzione del sistema nel tempo è rappresentata da una traiettoria nello spazio delle fasi formata dalla successione dei punti le cui coordinate x_2^t, T^t sono generate dalla iterata applicazione della Eq. (7). Una traiettoria dipende dal suo punto iniziale, cioè dai valori di x_2^t e T^t per $t = 0$, così che esistono infinite traiettorie nello spazio delle fasi.

Se le caratteristiche dell'alternativa innovativa vengono progressivamente adeguate all'incremento degli utilizzi, in modo da evitare che si verifichino situazioni di congestione, per cui le funzioni di costo conservano nel tempo la forma discendente dovuta alla diminuzione del costo al diminuire dell'incertezza, la sequenza temporale delle proporzioni x_2^t ha l'andamento della curva ad S di cui si è parlato nell'Introduzione, come si è mostrato in [13] e in [14], con riferimento all'auto elettrica e all'auto Diesel, rispettivamente.

Se invece le caratteristiche dell'alternativa innovativa non vengono adeguate all'incremento degli utilizzi, quando il loro numero nell'unità di tempo raggiunge un valore $x_2^t T^t = \hat{T}_2$, si verifica congestione: la funzione di costo $c_2(x_2^t T^t)$ cessa di avere la forma discendente data dalla Eq. (3) ed il costo inizia ad aumentare al crescere di $x_2^t T^t$. La funzione di costo è quindi formata da un tratto discendente fino a $x_2^t T^t = \hat{T}_2$, e da un successivo tratto ascendente. Ci

those of the coefficients of cost functions. If the sequence of the overall utilizations T^t of the two alternatives is known, as well as that of the proportions of utilizations \hat{x}_2^t of the innovative alternative, recorded in a sequence Σ of times t , e.g. one year apart, it is possible to estimate the value of parameters \bar{r} and K minimizing the square deviation between the recorded values of T^t and those that are obtained from the second Eq. (7). The values of β and those of the coefficients of cost functions can be estimated by the method proposed in [12], which is shortly summarised in the Appendix of this paper.

We observe that, as $x_1^t = 1 - x_2^t$, the state at time t of the system we are studying is completely identified by the overall number T^t of its utilizations and by the proportion x_2^t of utilizations of the innovative alternative, thus by the point of coordinates x_2^t, T^t in the phase space, which is constituted by the rectangular part of the non-negative orthant of the plane (x_2, T) bounded by the sides whose lengths are $x_2 = 1$ and $T = K$. Thus the evolution over time of the system is represented by a trajectory in the phase space, formed by the succession of points whose coordinates x_2^t, T^t are generated by the iterated application of Eq. (7). A trajectory depends on its initial point, i.e. on the values of x_2^t and T^t for $t = 0$, so that there are infinite trajectories in the phase space.

If the characteristics of the innovative alternative are adjusted progressively to the increase in its utilizations, in order to avoid situations of congestion, so that the cost functions maintain over time the decreasing pattern due to the decrease in costs as uncertainty diminishes, the time sequence of the proportions x_2^t has the S-shaped pattern mentioned in the Introduction, as shown in [13] and [14], with reference to the electric car and to the Diesel car, respectively.

Instead, if the characteristics of the innovative alternative are not adapted to the increase in its utilizations, when their number in the unit of time reaches a value $x_2^t T^t = \hat{T}_2$, congestion occurs: the cost function $c_2(x_2^t T^t)$ ceases to have the descending form given by Eq. (3), and cost begins to grow as $x_2^t T^t$ increases. Therefore the cost function is formed by a descending section up to $x_2^t T^t = \hat{T}_2$, and by a successive ascending section. We intend to study at this point the result of the application of Eq. (7) with this type of cost function.

A point of coordinates x_2^*, T^* which satisfies the following conditions:

$$\begin{aligned} x_2^* &= x_2^* + \beta [\bar{x}_2^* - x_2^*] \\ T^* &= T^* \left[1 + \bar{r}(1 - T^* / K) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

where \bar{x}_2^* is given by Eq. (5), in which $x_2^t = x_2^*$ and $T^t = T^*$, is a fixed point of Eq. (7). A fixed point (x_2^*, T^*) at which the sequence of points (x_2^t, T^t) converges, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2^t = x_2^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} T^t = T^*$, is an attractor of the system, where the latter is in stable equilibrium. A fixed point from which the trajectories diverge is a repelling point of the system.

proponiamo a questo punto di studiare il risultato dell'applicazione della Eq. (7) con questo tipo di funzione di costo.

Un punto di coordinate x_2^* , T^* che soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} x_2^* &= x_2^* + \beta [\bar{x}_2^* - x_2^*] \\ T^* &= T^* \left[1 + \bar{r} \left(1 - T^* / K \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

dove \bar{x}_2^* ha l'espressione Eq. (5), nella quale $x_2^t = x_2^*$ e $T^t = T^*$, è un punto fisso della Eq. (7). Un punto fisso (x_2^*, T^*) verso il quale la sequenza dei punti (x_2^t, T^t) converge, cioè $\lim_{t \rightarrow \infty} x_2^t = x_2^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} T^t = T^*$, è un attrattore del sistema, nel quale quest'ultimo è in equilibrio. Un punto fisso dal quale le traiettorie divergono è un punto repulsivo del sistema.

Poiché $\bar{r} > 0$, si ricava dalla seconda delle Eq. (8) che $T^* = K$. Si ha quindi che, per individuare i punti fissi della Eq. (7), e quindi le condizioni di equilibrio del sistema da essa definito, è sufficiente considerare solo la prima delle Eq. (7). Osservando che la funzione a secondo membro della prima delle Eq. (7) trasforma la generica variabile x_2^t appartenente all'intervallo $[0,1]$ nella variabile x_2^{t+1} appartenente allo stesso intervallo, utilizzando una notazione tipica della matematica delle trasformazioni puntuali di uno spazio su se stesso (cfr. [6] p. 19), poniamo $x_2^t = x$ e $x_2^{t+1} = x'$, per cui la prima delle Eq. (7) si scrive in questo modo:

$$x' = F(x) \quad (9)$$

in cui $F(x) = x + \beta(\bar{x} - x)$ e \bar{x} ha l'espressione Eq. (5) con K al posto di T^t .

La funzione $F(x)$ ha un punto fisso x_1^* , soluzione di $x = F(x)$, il quale è dato dalla ascissa della intersezione di $F(x)$ con la bisettrice dell'ortante non negativo del piano x , $F(x)$. Esso è stabile, e quindi attrattore della sequenza generata dalla Eq. (9), se il coefficiente angolare della tangente a $F(x)$ in x_1^* è compreso fra -1 e 1 (cfr. [6], p. 39, [26] p. 138), altrimenti è instabile, e quindi non è attrattore del sistema. Nel caso in cui $c_2(x_2^t T^t)$ è discendente, si verifica che x_1^* è sempre stabile. Invece nel caso in cui $c_2(x_2^t T^t)$ è composta di due tratti, uno discendente e l'altro ascendente, x_1^* è stabile quando il parametro β di $F(x)$ è piccolo, ma esiste un valore $\hat{\beta}_1$ di β tale che, per $\beta > \hat{\beta}_1$, x_1^* diventa instabile, e quindi non è più un attrattore del sistema. Consideriamo in questo caso le iterazioni di $F(x)$ date dalla ripetuta composizione di $F(x)$ con sé stessa:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x) \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x)) = F^2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= F(x_n) = F(F\dots F(F(x))) = F^n(x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dove, con una notazione tipica della matematica delle iterazioni funzionali (cfr. [11], p. 18), $F^n(x)$ indica la n-esima

As $\bar{r} > 0$ we have from the second Eq. (8) that $T^* = K$. Thus we have that, in order to identify the fixed points of Eq. (7), and thus the equilibrium conditions of the system it defines, it's enough to consider only the first Eq. (7). By considering that the function at the second side of the first Eq. (7) transforms the generic variable x_2^t belonging to the interval $[0,1]$ into a variable x_2^{t+1} belonging to the same interval, by using a notation typical of the mathematics of the punctual transformations of a space into itself (see [6] p. 19), we put $x_2^t = x$ and $x_2^{t+1} = x'$, so that the first Eq. (7) is written in this way:

$$x' = F(x) \quad (9)$$

where $F(x) = x + \beta(\bar{x} - x)$ and \bar{x} has the expression of Eq. (5) with K in the place of T^t .

Function $F(x)$ has a fixed point x_1^* , which is given by the intersection of $F(x)$ with the bisector of the non-negative orthant of plane x , $F(x)$. It is stable, thus attractor of the sequence generated by Eq. (9), if the angular coefficient of tangent to $F(x)$ in x_1^* is comprised between, -1 and 1 (see [6] p. 39, [26] p. 138), otherwise it is unstable, thus not attractor of the system. In the case in which $c_2(x_2^t T^t)$ is descending, it is verified that x_1^* is always stable. Instead, in the case in which $c_2(x_2^t T^t)$ is composed by two sections, one descending and the other ascending point, x_1^* is stable when the parameter β of $F(x)$ is small, but there is such a value $\hat{\beta}_1$ of β that for $\beta > \hat{\beta}_1$, x_1^* becomes unstable and thus it is no longer an attractor of the system. Consider at this point the iterations of $F(x)$ given by the repeated compositions of $F(x)$ with itself:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x) \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x)) = F^2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= F(x_n) = F(F\dots F(F(x))) = F^n(x) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

where, with a notation typical of functional iterations (see [11] p. 18), $F^n(x)$ denotes the nth iteration of $F(x)$, and not the nth power of $F(x)$. Fig. 2 shows the functions $F(x)$ and $F^2(x)$ in the case in which $\beta = 0.3$, which we'll be studied in Section 3. We see that $F^2(x)$ has three fixed points: x_1^* , x_2^* and y_2^* , which are identified by the intersections of function $F^2(x)$ with the bisector of the non-negative orthant of plane x , $F(x)$. x_2^* and y_2^* are stable, as the angular coefficient of the tangent to $F^2(x)$ in x_2^* and y_2^* ranges between -1 and 1. Instead x_1^* is unstable as the angular coefficient of the tangent in it to $F^2(x)$ is greater than 1. Moreover we observe that the ordinate of the intersection of $F^2(x)$ with the bisector at y_2^* , which equals y_2^* , is also equal to $F(x_2^*)$: $y_2^* = F(x_2^*)$.

On the other side, as x_2^* is fixed point of $F^2(x)$, i.e. $x_2^* = F^2(x_2^*)$, we have that $F(y_2^*) = F^2(x_2^*) = x_2^*$, this means that the pair x_2^* , y_2^* repeats itself over time and constitutes a periodic equilibrium pair of the sequence generated by Eq. $x^{t+1} = F(x^t)$. As β increases this periodic pair lasts, giving rise to periodic sequences of period 2, characterized by different val-

iterazione di $F(x)$, e non la n -esima potenza di $F(x)$. Nella Fig. 2 sono rappresentate le funzioni $F(x)$ e $F^2(x)$ nel caso in cui $\beta = 0.3$, studiato nella Sezione 3. Si vede che $F^2(x)$ ha tre punti fissi: x_1^* , x_2^* e y_2^* , che sono individuati dalle ascisse delle intersezioni della funzione $F^2(x)$ con la bisettrice dell'ortante non negativo del piano $x, F(x)$. x_2^* e y_2^* sono stabili, poiché il coefficiente angolare della tangente a $F^2(x)$ in x_2^* e y_2^* è compreso fra -1 e 1. Invece x_1^* è instabile poiché il coefficiente angolare della tangente in esso a $F^2(x)$ è maggiore di 1. Si vede inoltre che l'ordinata dell'intersezione di $F^2(x)$ con la bisettrice in corrispondenza di y_2^* , uguale a y_2^* , è anche uguale a $F(x_2^*)$: $y_2^* = F(x_2^*)$.

D'altra parte, poiché x_2^* è punto fisso di $F^2(x)$, cioè $x_2^* = F^2(x_2^*)$, si ha che $F(y_2^*) = F^2(x_2^*) = x_2^*$; ciò significa che la coppia x_2^*, y_2^* ripete se stessa nel tempo e costituisce una coppia periodica di equilibrio della sequenza generata dalla Eq. $x^{t+1} = F(x^t)$. All'aumentare di β questa coppia periodica perdura, dando luogo a sequenze periodiche di periodo 2, caratterizzate da diversi valori di x_2^* e y_2^* , finché un valore $\hat{\beta}_2$ viene raggiunto. Quando $\beta > \hat{\beta}_2$, x_2^* e y_2^* diventano instabili.

Consideriamo in questo caso l'iterazione $F^3(x)$. Nella Fig. 3 sono rappresentate le funzioni $F(x)$ e $F^3(x)$ nel caso in cui $\beta = 0.5$, studiato nella Sezione 3.

Si vede che $F^3(x)$ ha sette punti fissi, che sono individuati dalle ascisse delle sue intersezioni con la bisettrice dell'ortante non negativo del piano $x, F(x)$. Tre di essi, x_3^* , y_3^* e z_3^* sono stabili, poiché il coefficiente angolare della tangente a $F^3(x)$ in x_3^* , y_3^* e z_3^* è compreso fra -1 e 1, gli altri sono instabili. Si vede inoltre che le ordinate delle intersezioni di $F^3(x)$ con la bisettrice in corrispondenza di y_3^* e z_3^* , uguali rispettivamente a y_3^* e z_3^* , sono uguali a rispettivamente a $F(x_3^*)$ e $F(y_3^*)$: $y_3^* = F(x_3^*)$ e $z_3^* = F(y_3^*)$. D'altra parte, poiché x_3^* è punto fisso di $F^3(x)$, cioè $x_3^* = F^3(x_3^*)$, si ha che $F(z_3^*) = F^2(y_3^*) = F^3(x_3^*) = x_3^*$; ciò significa che la tripletta x_3^*, y_3^*, z_3^* ripete se stessa nel tempo e costituisce una tripletta periodica di equilibrio della sequenza generata dalla Eq. $x^{t+1} = F(x^t)$.

All'aumentare di β la tripletta x_3^*, y_3^*, z_3^* perdura, dando luogo a sequenze periodiche di periodo 3, caratterizzate da valori diversi di x_3^*, y_3^* e z_3^* , finché un valore $\hat{\beta}_3$ viene raggiunto. Quando $\beta > \hat{\beta}_3$, x_3^*, y_3^* e z_3^* diventano instabili. Aumentando β oltre $\hat{\beta}_3$, si ha una successione di sequenze periodiche di periodo 4, e così via con valore del periodo crescente all'aumentare di β . Così avviene che, quando al crescere nel tempo degli utilizzi dell'alternativa innovativa il numero di utilizzi $x_2^t T^t$ supera il valore \hat{T} in cui inizia il tratto ascendente della funzione di costo, la curva che rappresenta la sequenza temporale degli x_2^t generati

ues of x_2^* and y_2^* , until a value $\hat{\beta}_2$ is reached. When $\beta > \hat{\beta}_2$, x_2^* and y_2^* become unstable.

Consider in this case the iteration $F^3(x)$. Fig. 3 shows functions $F(x)$ and $F^3(x)$ in the case in which $\beta = 0.5$, which will be studied in Section 3.

We see that $F^3(x)$ has seven fixed points, which are identified by the intersections of the function with the bisector of the non-negative orthant of plane $x, F(x)$. Three of them, x_3^* , y_3^* and z_3^* are stable, as the angular coefficient of the tangent to $F^3(x)$ in x_3^* , y_3^* and z_3^* ranges between -1 and 1; the others are unstable. Moreover we see that the ordinates of the intersections of $F^3(x)$ with the bisector at y_3^* and z_3^* , which equal respectively y_3^* and z_3^* , are equal respectively to $F(x_3^*)$ and $F(y_3^*)$: $y_3^* = F(x_3^*)$ and $z_3^* = F(y_3^*)$. On the other side, as x_3^* is fixed point of $F^3(x)$, i.e. $x_3^* = F^3(x_3^*)$, we have that $F(z_3^*) = F^2(y_3^*) = F^3(x_3^*) = x_3^*$; this means that the triplet, x_3^*, y_3^*, z_3^* repeats itself over time and constitutes a periodic triplet of equilibrium of the sequence generated by Eq. $x^{t+1} = F(x^t)$.

As β increases the triplet x_3^*, y_3^*, z_3^* lasts, giving rise to periodic sequences of period 3, characterized by different values of x_3^*, y_3^* and z_3^* , until a value $\hat{\beta}_3$ is reached. When $\beta > \hat{\beta}_3$, x_3^*, y_3^* and z_3^* become unstable. As β increases over $\hat{\beta}_3$, we have a series of periodic sequences of period 4, and so on as parameter β increases. So, it happens that, when the increasing number of utilizations of the innovative alternative $x_2^t T^t$ exceeds the value \hat{T} where the ascending section of the cost function begins, the curve that represents the time sequence of x_2^t generated by Eq. (7) departs from the curve that represents the sequence of x_2^t when cost function is descending, and tends, after an initial stretch of transition, towards a situation of periodic equilibrium where the amplitudes of both the period and the oscillation depend on the value of β .

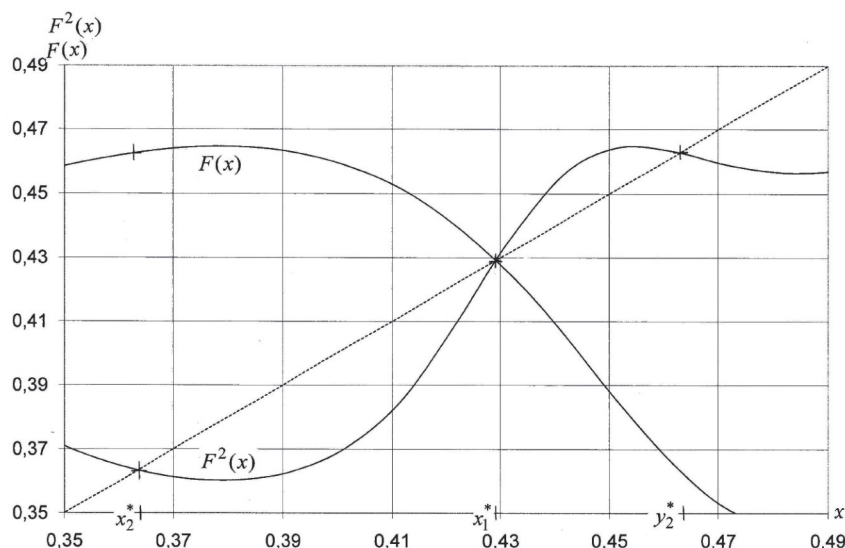


Figura 2 – Punti fissi x_1^* , x_2^* e y_2^* ottenuti come intersezioni della funzione $F^2(x)$ con la bisettrice dell'ortante non negativo del piano $x, F(x)$.

Figure 2 – Fixed points x_1^* , x_2^* and y_2^* obtained as intersections of function $F^2(x)$ with the bisector (broken line) of the non-negative orthant of plane $x, F(x)$.

dalla Eq. (7) si discosta dalla curva che rappresenta la sequenza temporale degli x_2^t quando la funzione di costo è discendente, e tende, dopo un iniziale tratto di transizione verso una situazione di equilibrio periodico in cui l'ampiezza del periodo cresce all'aumentare di β .

Tutti questi risultati verranno illustrati nella Sezione 3 con un esempio relativo al processo di diffusione dell'auto elettrica.

3. Un esempio di applicazione del modello allo studio del processo di diffusione dell'auto elettrica

In un precedente articolo [13] è stata studiata l'evoluzione nel tempo della ripartizione delle vendite in Europa fra auto con motore a combustione interna (MCI) e auto elettriche, utilizzando i dati forniti da ACEA [1] e IEA [17]. Considerando le auto MCI come tradizionali e quelle elettriche come innovative, esse sono state etichettate con gli indici 1 e 2 rispettivamente.

Utilizzando i numeri di vendite di auto elettriche in Europa registrati da IEA fra il 2011 e il 2019, ed i corrispondenti numeri T^t di vendite complessive di auto nello stesso periodo, registrati da ACEA, sono state calcolate le proporzioni x_2^t di auto elettriche vendute annualmente in Europa fra il 2011 e il 2019. Supponendo che l'evoluzione nel tempo di T^t segua la Eq. (1), a partire dal valore iniziale $T^0 = 12,809 \cdot 10^6$ registrato nel 2011, sono stati stimati, minimizzando lo scarto quadratico fra i valori registrati da ACEA e quelli che si ricavano dalla Eq. (1), i valori dei parametri \bar{r} e K : $\bar{r} = 0,2$ e $K = 16,5 \cdot 10^6$. Quindi, utilizzando la sequenza di x_2^t , e la corrispondente sequenza di T^t fornita dalla Eq. (1), sono stati stimati, con la procedura esposta in Appendice, i valori del parametro β della Eq. (6) ed i coefficienti delle funzioni di costo, alle quali è stata attribuita, per le ragioni illustrate nella Sezione 2, l'espressione di funzione esponenziale discendente. È stato così stimato che $\beta = 0,232$, mentre la stima dei coefficienti fornisce le seguenti espressioni per le funzioni $c_i(x_i^t T^t)$ delle auto MCI, $i = 1$, e delle auto elettriche, $i = 2$, rispettivamente:

$$\begin{aligned} c_1(x_1^t T^t) &= 1,499 + 1,332 \exp(-0,0856 x_1^t T^t) \\ c_2(x_2^t T^t) &= 1,000 + 5,578 \exp(-1,2098 x_2^t T^t) \end{aligned} \quad (10)$$

dove T^t è espresso in milioni di auto.

L'andamento delle funzioni di costo $c_i(x_i^t T^t)$, $i = 1, 2$, fornite dalle Eq. (10) è mostrato in Fig. 4, con linea continua per le auto elettriche e linea tratteggiata per le auto MCI.

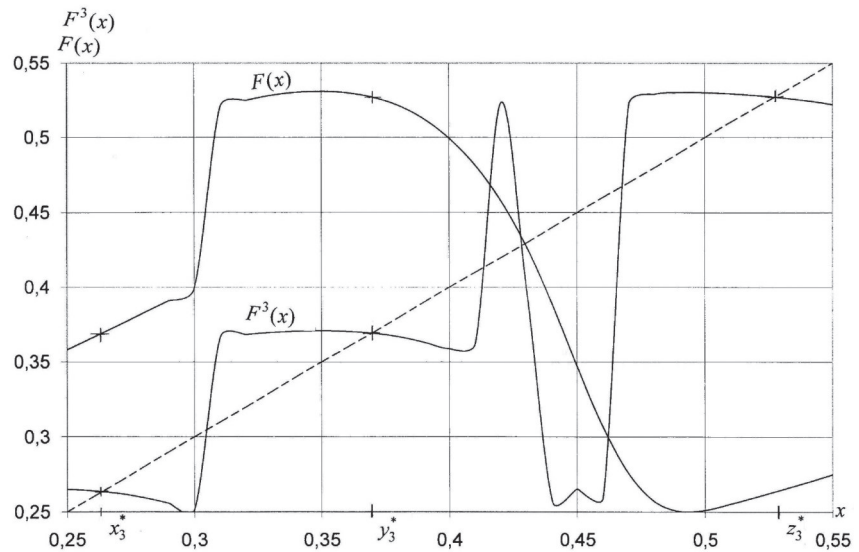


Figura 3 – Punti fissi ottenuti come intersezioni della funzione $F^3(x)$ con la bisettrice dell'ortante non negativo del piano $x, F(x)$. Di essi x_3^* , y_3^* e z_3^* sono stabili.

Figure 3 – Fixed points obtained as intersections of function $F^3(x)$ with the bisector of the non-negative orthant of plane $x, F(x)$. Among them, x_3^* , y_3^* and z_3^* are stable.

All these results will be illustrated in Section 3 with an example relative to the process of diffusion of the electric car in Europe.

3. An application of the model to the study of the diffusion process of the electric car

In a previous paper [13] the evolution of the split over time of sales in Europe between MCI cars and electric cars has been studied, by using the data furnished by ACEA [1] and IEA [17]. Considering MCI cars as traditional and electric cars as innovative, they have been labelled with indexes 1 and 2, respectively.

By using the numbers of sales of electric cars in Europe recorded by IEA between 2011 and 2019, and the corresponding number T^t of overall sales of cars in the same period, recorded by ACEA, the proportions x_2^t of electric cars sold yearly in Europe between 2011 and 2019 have been computed. Supposing that the evolution over time of T^t follows Eq. (1), starting from the initial value $T^0 = 12,809 \cdot 10^6$ recorded in 2011, we have estimated, minimizing the square deviations between the values recorded by ACEA and those that are obtained by Eq. (1), the values of parameters \bar{r} and K : $\bar{r} = 0.2$ and $K = 16.5 \cdot 10^6$. Then, by using the sequence of x_2^t , and the corresponding sequence of T^t given by Eq. (1), we have estimated, through the procedure presented in the Appendix, the values of parameter β and the coefficients of cost functions, to which the expression of exponential descending has been attributed, for the reason illustrated in Section 2. In this way we have estimated that $\beta = 0.232$, while the estimation of the coefficients furnishes the follow-

Si vede che all'inizio del processo di diffusione, quando le vendite sono ancora praticamente nulle, il costo relativo alle auto elettriche è molto elevato, a causa dell'incertezza dei probabili compratori, ma diminuisce rapidamente all'aumentare del numero di vendite annue, per le ragioni viste nella Introduzione. La figura mostra inoltre che il costo attribuito dai probabili compratori alle auto MCI varia poco con la diffusione. Ciò è dovuto al fatto che l'incertezza circa le potenzialità delle auto MCI è molto modesta, data la loro presenza sul mercato da un tempo molto lungo.

Supponendo che il processo di diffusione dell'auto elettrica evolva nel tempo oltre il 2019 in modo tale che β conservi il valore stimato $\beta = 0,232$, e che i costi attribuiti dai potenziali compratori all'auto elettrica e all'auto MCI continuino ad essere vicini ai valori forniti dalle Eq. (10), mentre l'evoluzione nel tempo di T^t è quella data dalla Eq. (1) con $r = 0,2$ e $K = 16,5 \cdot 10^6$, le Eq. (10) di $c_i(x_i^t T^t)$ sono state utilizzate per calcolare, tramite la iterata applicazione della Eq. (7), la sequenza di x_2^t negli anni successivi al 2019.

La traiettoria di questa sequenza è riportata in Fig. 5, sovrapposta ai punti corrispondenti ai valori sperimentali fino al 2019.

Questa traiettoria ha la forma ad S della curva di diffusione delle innovazioni, il cui tratto iniziale di modesta pendenza è formato dagli x_2^t fino al 2019: essa presenta un punto di svolta fra il 2021 e il 2022, oltre il quale la pendenza cresce notevolmente per un certo periodo di tempo, per andare poi a ridursi progressivamente.

La Fig. 6 mostra la traiettoria delle vendite annue $x_2^t T^t$ di auto elettriche a partire dal 2011, la quale ha anch'essa la caratteristica forma ad S della diffusione delle innova-

ing expressions for functions $c_i(x_i^t T^t)$ of ICE cars, $i = 1$, and of electric cars, $i = 2$, respectively:

$$\begin{aligned} c_1(x_1^t T^t) &= 1,499 + 1,332 \exp(-0,0856 x_1^t T^t) \\ c_2(x_2^t T^t) &= 1,000 + 5,578 \exp(-1,2098 x_2^t T^t) \end{aligned} \quad (10)$$

where T^t is expressed in million cars.

The pattern of cost functions $c_i(x_i^t T^t)$, $i = 1, 2$, furnished by Eq. (10) is shown in Fig. 4, with continuous line for electric cars and with broken line for ICE cars.

We see that at the beginning of the diffusion process, when sales are still practically zero, the cost relative to electric cars is very high, because of uncertainty of potential buyers, but it decrease quickly as the number of yearly sales increases, for the reasons exposed in the Introduction. Moreover the figure shows that the cost attributed by potential buyers to ICE cars changes slightly with the diffusion. This is due to the fact that uncertainty about the potential of ICE cars is very small, since these vehicles are on the market for a long time.

Supposing that the diffusion process of the electric car evolves over time beyond 2019 in such a way that β maintains the estimated value $\beta = 0.232$ and the costs attributed by potential buyers to electric cars and to ICE cars continue to be close to the values given by Eq. (10), while the evolution over time of T^t is that given by Eq. (1) with $r = 0.2$ and $K = 16.5 \cdot 10^6$, the Eq. (10) of $c_i(x_i^t T^t)$ have been used to compute, through the iterate application of Eq. (7), the sequence of x_2^t in the years after 2019.

The trajectory of this sequence is shown in Fig. 5, superimposed on the points corresponding to the experimental values until 2019.

This trajectory has the S shape of the curve of diffusion of innovations, whose initial section of slight slope is constituted by x_2^t the until 2019: it shows a tipping point between 2021 and 2022, beyond which the slope increases remarkably for a certain time period, and then it diminishes progressively.

Fig. 6 shows the trajectory of the yearly sales $x_2^t T^t$ of electric cars starting from 2011, which has equally the characteristic S shape of the diffusion of innovations. The trajectories represented in Fig. 5 and Fig. 6 are conditioned by the hypothesis, as said above, that the costs attributed by potential buyers to electric cars and to ICE cars continue to be close to those given by Eq. (10), for all the time period considered in the figures.

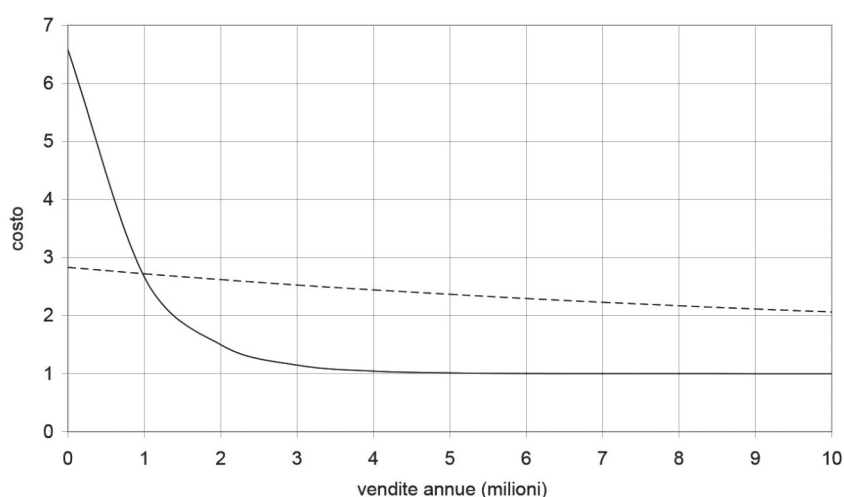


Figura 4 – Traiettorie delle funzioni di costo $c_i(x_i^t T^t)$ per le auto MCI (linea tratteggiata) e per le auto elettriche (linea continua).

Figure 4 – Trajectories of cost functions $c_i(x_i^t T^t)$ for ICE cars (broken line) and for electric cars (continuous line).

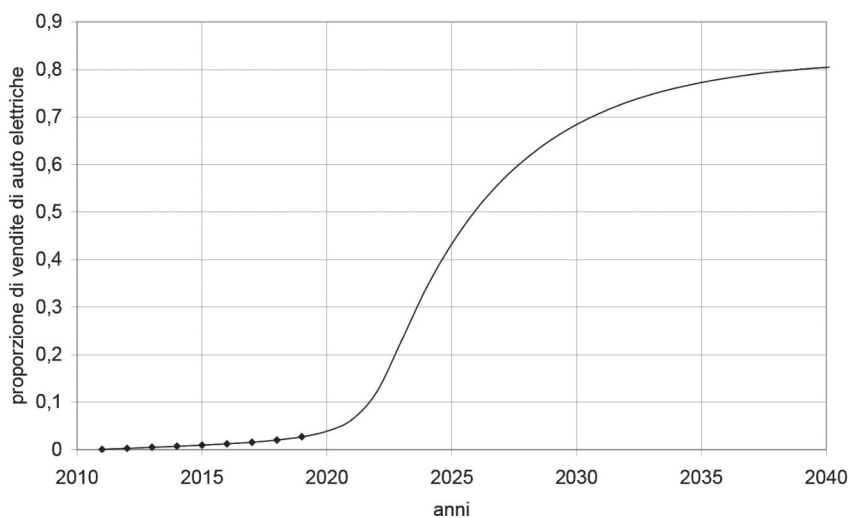


Figura 5 – Traiettorie della proporzione di vendite annue di auto elettriche fra il 2011 e il 2040 sovrapposta ai punti registrati fra il 2011 e il 2019.

Figure 5 – Trajectory of the proportion of yearly sales of electric cars between 2011 and 2040 superimposed on the points recorded between 2011 and 2019.

zioni. Le traiettorie rappresentate nelle Fig. 5 e Fig. 6 sono condizionate dall'ipotesi che, come si è detto sopra, i costi attribuiti dai potenziali compratori all'auto elettrica e all'auto MCI continuino ad essere vicini ai valori forniti dalle Eq. (10) per tutto l'intervallo temporale considerato nelle figure.

È possibile che ciò non avvenga, perché il sistema di trasporto basato sull'auto elettrica non adegua le sue caratteristiche all'aumento del numero di auto elettriche in circolazione. Questo adeguamento richiede essenzialmente l'aumento dell'offerta di energia elettrica ed il progressivo aumento del numero delle stazioni di ricarica.

Risulta da una indagine eseguita dalla NISSAN [5] che la percorrenza media annua di un'auto elettrica in Europa è 14,000 km, mentre il consumo medio di un'auto elettrica è 0.2 kWh per km, per cui il consumo medio annuo di un'auto elettrica è 2,800 kWh. Allo scopo di conoscere l'ordine di grandezza dell'aumento dell'offerta di energia elettrica necessario alla mobilità elettrica, si considera a titolo di esempio il caso dell'Italia nella quale nel 2019 hanno circolato 39,543,230 auto. Nell'ipotesi che metà di esse fossero state elettriche, sarebbe stata necessaria per alimentarle un'offerta annua di energia elettrica uguale a $0.5 \cdot 39,543,230 \cdot 2,800 = 55.36 \cdot 10^6 \text{ kWh} = 55.36 \text{ TWh}$. Tenendo presente che i consumi di energia

It is possible that this does not occur, because the system based on the electric car does not adapt its characteristics to the increase in the number of electric circulating cars. This adaptation requires essentially the increase in the supply of electric energy and the progressive increase in the number of charging stations.

It results from a survey made by NISSAN [5] that the average yearly distance travelled by an electric car in Europe is 14,000 km, while the average consumption of an electric car is 0.2 kWh per km, so that the average yearly consumption of an electric car is 2,800 kWh. In order to know the magnitude of the increase in the supply of electric energy necessary to electric mobility, we consider as an example the case of Italy where 39,543,230 cars circulated in 2019. In the hypothesis that half of them had been electric, an yearly supply of electric energy equal to $0.5 \cdot$

$39,543,230 \cdot 2,800 = 55.36 \cdot 10^6 \text{ kWh} = 55.36 \text{ TWh}$ would have been necessary to power them. Considering that the electricity consumption in Italy in 2020 was 301.25 TWh, a percentage increase in supply of electric energy equal to $55.36/301.25 = 18.4\%$ would have been necessary to power the electric mobility, a rather high value. The problem becomes even more complicated if we consider that this supplementary supply of electric energy should come from renewable sources, because otherwise the substitution of ICE cars with electric cars wouldn't make sense. The supply of

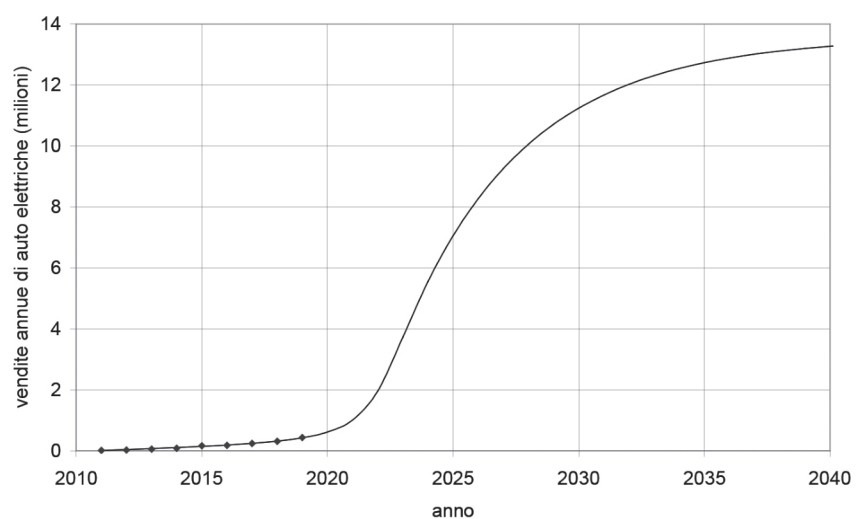


Figura 6 – Traiettorie delle vendite annue di auto elettriche fra il 2011 e il 2040 sovrapposta ai punti registrati fra il 2011 e il 2019.

Figure 6 – Trajectory of yearly sales of electric cars between 2011 and 2040 superimposed on the points recorded between 2011 and 2019.

elettrica in Italia nel 2020 sono stati 301,25 TWh, sarebbe stato necessario, per alimentare la mobilità elettrica, un aumento percentuale di offerta di energia elettrica uguale a $55,36/301,25 = 18,4\%$, valore abbastanza elevato. Il problema si complica ulteriormente se si tiene presente che questa offerta supplementare di energia elettrica dovrebbe provenire da fonti rinnovabili, perché altrimenti la sostituzione di auto MCI con auto elettriche non avrebbe senso. La produzione di energia elettrica da fonti rinnovabili in Italia è stata nel 2020 uguale a 111,92 TWh, di cui il 42% di origine idroelettrica, per ragioni diverse non incrementabile. Sarebbe stato quindi necessario raddoppiare all'incirca la produzione di energia elettrica da fonti rinnovabili suscettibile di incremento – fotovoltaico, eolico, da biomasse – la quale invece è rimasta praticamente costante durante il decennio 2011-2020.

Da uno studio ACEA [2] risulta che in Europa sono installate circa 225.000 stazioni di ricarica per auto elettriche, di cui il 70% in soli tre paesi: Paesi Bassi, Francia, Germania. In Italia sono 13.073. Si ha quindi che nella maggior parte dei Paesi Europei il numero di stazioni di ricarica è estremamente modesto, in Grecia per esempio sono 275 in tutto il territorio nazionale.

L'insufficiente offerta di energia elettrica potrebbe indurre le Pubbliche Amministrazioni a porre limiti all'uso delle auto elettriche allo scopo di evitare fenomeni di *black-out*. D'altra parte l'insufficiente diffusione delle stazioni di ricarica darebbe luogo a code, tempi di attesa e perdite di tempo per gli utenti. Si può quindi supporre che questi, superato un valore di soglia del numero di vendite annue, comincino ad attribuire all'auto elettrica un costo crescente all'aumentare delle vendite. La funzione di costo, che fino a questo valore di soglia ha un andamento discendente, assumerebbe un andamento ascendente all'aumentare del numero di vendite annue.

Si ha quindi che, mentre la funzione di costo delle auto MCI conserverebbe l'andamento discendente dato dalla prima delle Eq. (10), quello delle auto elettriche sarebbe composto di due tratti, uno discendente dato dalla seconda delle Eq. (10) fino ad un valore $x_2^t T^t = \hat{T}_2$ del numero di vendite annue, ed un secondo tratto ascendente. Supponendo che \hat{T}_2 abbia il valore $\hat{T}_2 = 5 \cdot 10^6$, si è attribuita al tratto ascendente della funzione di costo delle auto elettriche la seguente espressione:

$$c_2^t T^t = \exp[0,2(x_2^t T^t - 5)^2] \quad (11)$$

dove T^t è espresso in milioni di auto.

L'andamento delle funzioni così ottenute dalle Eq. (10) e dalla Eq. (11) è mostrato nella Fig. 7, rappresentato con linea tratteggiata per le auto MCI e con linea continua per le auto elettriche.

Tenendo conto di quanto si è visto nella Sezione precedente, per valori del tempo successivi al 2024, anno in cui, come si vede dalla Fig. 6, il numero $x_2^t T^t$ di vendite annue

electric energy from renewable sources in Italy in 2020 was equal to 111.92 TWh, the 42% of which is of hydroelectric origin, for many reasons not incrementable. Thus it would have been necessary to approximately double the production of electric energy from the renewable sources that can be increased – solar, wind, biomass – which instead remained practically constant during the twenty years 2011-2020.

It results from a study of ACEA [2] that 225.000 charging stations for electric cars are installed in Europe, the 70% of which in only three countries: Netherlands, France, Germany. In Italy they are 13,073. Thus we have that in most European countries the number of charging stations is very poor, e.g. in Greece they are 275, in all the national territory.

The insufficient supply of electric energy could lead Public Administrations to put limits to the use of electric cars, in order to avoid phenomena of electric black-out. On the other side the insufficient diffusion of charging stations would give rise to queues, waiting time and waste of time for users. Thus we can suppose that the latter, exceeded a threshold value of the number of yearly sales, begin to attribute an increasing cost to electric cars as the number of sales increases. The cost function, which has a decreasing pattern up to this threshold value, assumes an increasing trend as the number of sales grows.

Thus we have that, while the cost function of ICE cars would maintain the decreasing pattern given by the first Eq. (10), that of electric cars would be composed of two parts, one decreasing given by the second Eq. (10) up to a value $x_2^t T^t = \hat{T}_2$ of the number of yearly sales, and by a second ascending one. Assuming that \hat{T}_2 has the value $\hat{T}_2 = 5 \cdot 10^6$, we have attributed to the ascending section of the cost function of electric cars the following expression:

$$c_2^t T^t = \exp[0,2(x_2^t T^t - 5)^2] \quad (11)$$

where T^t is expressed in million cars.

The trajectory of the cost functions so obtained from Eq. (10) and Eq. (11) is shown in Fig. 7, represented with broken line for the ICE cars and with continuous line for the electric cars.

Considering what we have seen in the previous Section, for values of time after the year 2024 in which – as we see in Fig. 6 – the number $x_2^t T^t$ of yearly sales of electric cars exceeds the value $\hat{T}_2 = 5 \cdot 10^6$, the sequence of x_2^t generated by Eq. (7), which represents the evolution over time of x_2^t , detaches from the S-shaped curve that represents the evolution over time of x_2^t when the cost function $c_2(x_2^t T^t)$ of electric cars is descending, and tends towards a different condition of equilibrium. The characteristics of the latter depend on the value of parameter β of Eq. (6), i.e. on the quickness with which users move from an alternative to the other as a consequence of the variations of cost over time.

When β is small the sequence of x_2^t tends, after a series of small damped oscillations, towards an equilibrium point constant over time. When β exceeds a value β_1 the equilibri-

di auto elettriche supera il valore $\hat{T}_2 = 5 \cdot 10^6$, la sequenza di x_2^t generata dalla Eq. (7) con le funzioni di costo mostrate nella Fig. 7, la quale rappresenta l'evoluzione nel tempo di x_2^t , si distacca dalla curva ad S che individua l'evoluzione nel tempo di x_2^t quando la funzione di costo $c_2(x_2^t T^t)$ dell'auto elettrica è discendente, e tende verso un diversa condizione di equilibrio. Le caratteristiche di quest'ultima dipendono dal valore del parametro β della Eq. (6), cioè dalla rapidità con cui gli utilizzi vengono trasferiti da una alternativa all'altra come conseguenza delle variazioni del costo nel tempo.

Quando β è piccolo la sequenza di x_2^t tende, dopo una successione di piccole oscillazioni smorzate, verso un punto di equilibrio costante nel tempo. Quando β supera un valore $\hat{\beta}_1$ lo stato di equilibrio è dato da una successione di oscillazioni periodiche di x_2^t , in cui l'ampiezza delle oscillazioni e la durata del periodo, costanti nel tempo, aumentano al crescere di β .

Attraverso la ripetuta applicazione della Eq. (7) sono stati calcolati i valori $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \dots$ in corrispondenza dei quali si ha la transizione da uno stato di equilibrio ad un altro: $\hat{\beta}_1$ da uno stato con un unico punto di equilibrio ad uno con periodo 2, $\hat{\beta}_2$ da uno stato con periodo 2 ad uno stato con periodo 3, $\hat{\beta}_3$ da uno stato con periodo 3 ad uno stato con periodo 4, e così via. Si sono così ottenuti i seguenti valori:

$$\hat{\beta}_1 = 0,2268, \quad \hat{\beta}_2 = 0,4000; \quad \hat{\beta}_3 = 0,6848; \quad \hat{\beta}_4 = 0,8693$$

Attraverso la iterata applicazione della Eq. (7) sono state calcolate le sequenze di x_2^t dal 2011 al 2050, con $c_2(x_2^t T^t)$ data dalla seconda delle Eq. (10) e con $\beta = 0,232$, finché $x_2^t T^t$ raggiunge il valore $5 \cdot 10^6$ nel 2024, e quindi con $c_2(x_2^t T^t)$ data dalla Eq. (11) e con diversi valori di β per $x_2^t T^t > 5 \cdot 10^6$: $\beta = 0,2 < \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_1 < \beta = 0,3 < \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2 < \beta = 0,5 < \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_3 < \beta = 0,7 < \hat{\beta}_4$.

L'andamento delle sequenze è riportato nella Fig. 8. Esso ha, fino all'anno 2024, l'andamento ad S dovuto alla funzione di costo $c_2(x_2^t T^t)$ discendente, del quale è rappresentato con linea tratteggiata il proseguimento oltre il 2024 che si sarebbe realizzato se la funzione di costo fosse rimasta inalterata. Nel 2024 l'andamento delle x_2^t si distacca dalla curva ad S e, dopo un breve tratto di transizione, raggiunge lo stato di equilibrio. Questo, quando $\beta = 0,20$, è rappresentato da un punto che si ripete costantemente nel tempo, raggiunto dopo una breve sequenza di piccole oscillazioni smorzate. Per valori maggiori di β l'equilibrio è rappresentato da una successione di stati periodici che, dopo un breve periodo di transizione, si ripeto-

um state is given by a sequence of periodic oscillation of x_2^t , in which the amplitude of the oscillations and the length of the period, constant over time, increase as β increases.

Through the iterate application of Eq. (7), the values $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \dots$ have been computed, in correspondence of which there is the transition from an equilibrium state to another: $\hat{\beta}_1$ from a state with a unique equilibrium point to one with period 2, $\hat{\beta}_2$ from a state with period 2 to one with period 3, $\hat{\beta}_3$ from a state with period 3 to one with period 4, and so on. So the following values were obtained:

$$\hat{\beta}_1 = 0.2268, \quad \hat{\beta}_2 = 0.4000; \quad \hat{\beta}_3 = 0.6848; \quad \hat{\beta}_4 = 0.8693$$

Through the iterate application of Eq. (7) the sequences of x_2^t from 2011 to 2050 have been computed, with $c_2(x_2^t T^t)$ given by the second Eq. (10) and with $\beta = 0.232$, until $x_2^t T^t$ reaches the value $5 \cdot 10^6$ in 2024, and then with $c_2(x_2^t T^t)$ given by Eq. (11) and with various value of β for $x_2^t T^t > 5 \cdot 10^6$: $\beta = 0.2 < \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_1 < \beta = 0.3 < \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2 < \beta = 0.5 < \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_3 < \beta = 0.7 < \hat{\beta}_4$.

The trajectories of the sequences are shown in Fig. 8. It has, until year 2024, the S-shape due to the descending cost function $c_2(x_2^t T^t)$, of which the figure shows with broken line the continuation beyond 2024 that would have occurred had the cost function remained unchanged. In 2024 the trajectory of x_2^t detaches from the S curve and, after a short section of transition, reaches the state of equilibrium. This, when $\beta = 0.20$, is represented by a point that repeats itself constantly over time, which is reached after a short sequence of small damped oscillations. For greater values of β the equilibrium is represented by a succession of periodic

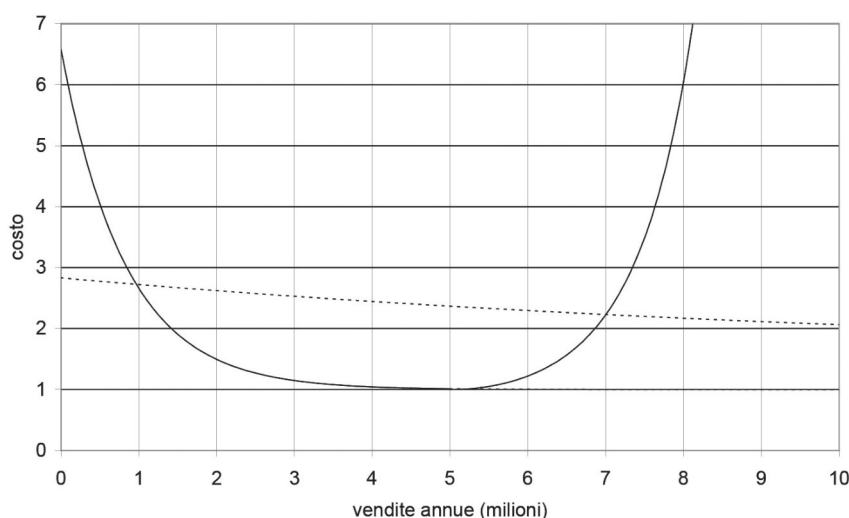


Figura 7 – Traiettorie delle funzioni di costo $c_i(x_i^t T^t)$ per le auto MCI (linea tratteggiata) e per le auto elettriche (linea continua) nel caso in cui il costo di queste ultime sia funzione crescente del numero di vendite annue a partire dal valore $\hat{T}^t = 5 \cdot 10^6$.

Figure 7 – Trajectories of cost functions $c_i(x_i^t T^t)$ or the ICE cars (broken line) and for the electric cars (continuous line) in the case that the cost of the latter is increasing function of the number of yearly sales starting from the value $\hat{T}^t = 5 \cdot 10^6$.

no costantemente, con periodo 2 per $\beta = 0,30$, periodo 3 per $\beta = 0,50$, periodo 4 per $\beta = 0,70$.

La Fig. 8, ricavata come caso di studio con riferimento all'auto elettrica, pone in luce le caratteristiche evolutive di una innovazione nel mondo dei trasporti, quando il sistema di trasporto basato sull'innovazione non adegua le sue caratteristiche all'aumento del numero di utilizzi, per cui si crea congestione.

Quando il numero di utilizzi nell'unità di tempo supera una certa soglia, per cui la congestione è giudicata intollerabile dagli utilizzatori, questi attribuiscono un costo crescente alla innovazione con l'aumentare degli utilizzi. A questo punto l'evoluzione nel tempo del sistema si discosta da quella in assenza di congestione, e tende verso una condizione di equilibrio che dipende dall'atteggiamento degli utilizzatori. Se questi reagiscono con prudenza alle variazioni di costo, per cui solo una piccola parte di coloro che ritengono una alternativa divenuta preferibile all'altra a causa delle variazioni di costo effettivamente la adottano, la proporzione di utilizzi dell'alternativa innovativa tende, dopo una serie di piccole oscillazioni, verso un unico valore di equilibrio, alquanto inferiore a quello che si sarebbe realizzato in assenza di congestione. Se invece gli utilizzatori reagiscono in modo impulsivo, per cui una porzione notevole degli utilizzi viene trasferita da una alternativa all'altra seguendo le variazioni di costo, il sistema tende verso una condizione di equilibrio periodico, in cui sia la durata del periodo che l'ampiezza delle oscillazioni sono tanto più grandi quanto maggiore è la rapidità con cui gli utilizzatori reagiscono alle variazioni di costo.

Ritornando ad esaminare, alla luce di questi risultati, la Fig. 1 che riporta l'andamento nel tempo delle proporzioni di merci trasportate sull'autostrada del Brennero, oscillante intorno ad un valore costante nel tempo uguale a 0,714, si deve ritenere che si tratta di una condizione di equilibrio conseguente alla elevata congestione sull'autostrada. Come rilevato in precedenza, è possibile che queste oscillazioni periodiche dell'equilibrio siano dovute anche ad altri fattori, come per esempio la variazione dell'offerta di trasporto su rotaia, le fluttuazioni nel prezzo del gasolio e le restrizioni oggi molto forti imposte dal governo austriaco. Si deve però osservare che, mentre è stato dimostrato in questo articolo che la congestione sull'autostrada, documentata con certezza, dà luogo a fluttuazioni periodiche dei costi da cui derivano le oscillazioni dell'equilibrio, il fatto che questi altri fattori diano luogo a fluttuazioni periodiche dell'equilibrio è solo una congettura che dovrebbe essere dimostrata.

L'elevato valore, sia della durata del periodo che del-

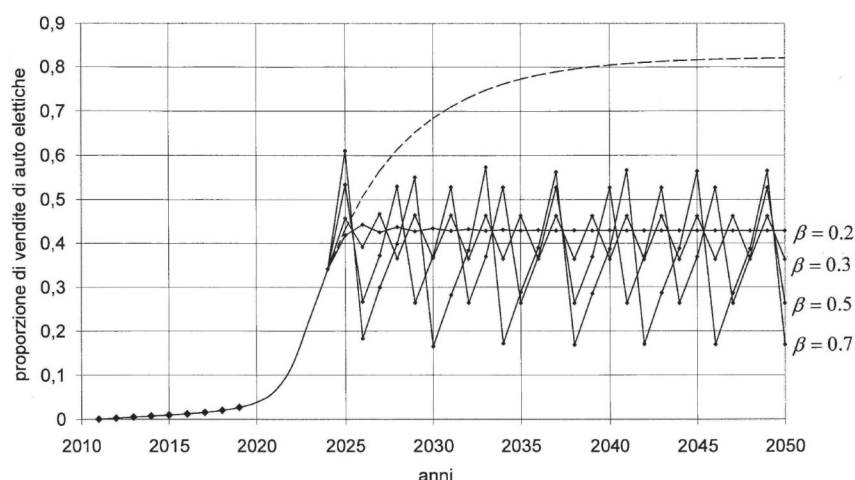


Figura 8 – Traiettorie delle proporzioni di vendite di auto elettriche fra il 2011 e il 2050 per diversi valori di β .

Figure 8 – Trajectories of the proportions of sales of electric cars between 2011 and 2050 for various values of β .

states that, after a short period of transition, repeat themselves, with period 2 for $\beta = 0.30$, period 3 for $\beta = 0.50$, period 4 for $\beta = 0.70$.

Fig. 8, obtained as study case with reference to electric cars, highlights the evolutionary characteristics of an innovation in the transport world, when the transport system based on the innovation does not adequate its characteristics to the increase in the number of utilizations, so that congestion occurs.

When the number of utilizations in a time unit exceeds a certain threshold, so that congestion is deemed intolerable by users, they attribute an increasing cost to the innovation as the utilizations grow. At this point the evolution over time of the system detaches from the preceding one in the absence of congestion, and tends towards an equilibrium condition that depends on the attitude of users. If they react with caution to the cost variation, so that only a small part of those who deem that an alternative has become preferable to the other because of cost changes actually adopt it, the proportion of utilizations of the innovative alternative tends, after a series of small damped oscillations, towards a unique value of equilibrium, rather less than which would have occurred in the absence of congestion. Instead, if the users react impulsively, so that a remarkable fraction of them move from an alternative to the other following the cost variations, the system tend towards a periodic state of equilibrium in which both the length of the period and the amplitude of the oscillations are greater the higher the quickness with which users react to the cost variations is.

Returning to examine, in light of these results, Fig.1 that shows the evolution over time of the proportions of goods carried on the Brenner motorway, oscillating around a value constant over time equal to 0.714, we should maintain that it is an equilibrium condition due to the high congestion on

l'ampiezza delle oscillazioni che si osservano nella figura, sta ad indicare che una porzione notevole delle spedizioni viene spostata dall'autostrada alla ferrovia e viceversa seguendo le variazioni di costo dovute alle variazioni del livello di congestione. L'atteggiamento impulsivo degli spedizionieri, che spostano gli utilizzi da una alternativa all'altra in proporzione variabile in modo casuale nel tempo, e diverso per i vari spedizionieri, dà conto della forma irregolare dell'evoluzione rappresentata in Fig. 1, diversa da quella estremamente regolare della Fig. 8, ricavata da un modello matematico.

4. Conclusioni

In conclusione di questo articolo si può affermare che lo stato di equilibrio di una innovazione introdotta nel mondo dei trasporti in competizione con una alternativa tradizionale, rappresentato da una serie di oscillazioni periodiche della proporzione di utilizzi intorno ad un valore medio costante nel tempo, è dovuto, almeno in parte, al fatto che il numero di utilizzi nell'unità di tempo ha superato la capacità del sistema di trasporto basato sull'innovazione, a causa del mancato adeguamento delle caratteristiche del sistema all'aumento nel tempo del numero degli utilizzi.

Un esempio di questo stato di equilibrio è fornito dalla Fig. 1, la quale mostra una serie di oscillazioni periodiche, intorno ad un valore medio costante, della proporzione di tonnellate di merci trasportate annualmente in autostrada al valico del Brennero in competizione con la ferrovia, fra il 1994 e il 2014. In effetti l'autostrada del Brennero, entrata in esercizio nel 1974, non ha adeguato le sue originali caratteristiche geometriche – sezione a doppia carreggiata con due corsie per carreggiata – allo straordinario aumento del traffico di veicoli pesanti.

Il modello dinamico presentato in questo articolo ha mostrato che, mentre il progressivo adeguamento delle caratteristiche del sistema basato sull'innovazione, in misura tale da evitare fenomeni di congestione, dà luogo ad una evoluzione che segue la curva ad S tipica delle innovazioni, il mancato adeguamento interrompe questa evoluzione quando il livello di congestione raggiunge un valore non ritenuto sopportabile dagli utilizzatori, dando luogo ad una diversa evoluzione che raggiunge, dopo un breve periodo di transizione, uno stato di equilibrio individuato da oscillazioni periodiche intorno ad un valore medio alquanto minore del valore asintotico verso cui tende la curva ad S.

La configurazione dell'equilibrio dipende dall'atteggiamento degli utilizzatori. Se questi reagiscono con prudenza alle variazioni di costo, la proporzione di utilizzi dell'alternativa innovativa tende, dopo una serie di piccole oscillazioni, verso un unico valore di equilibrio, alquanto inferiore a quello che si sarebbe realizzato in assenza di congestione. Se invece gli utilizzatori reagiscono in modo impulsivo, per cui una porzione notevole degli utilizzi viene

motorway. It is certainly possible, as mentioned above, that these periodic oscillations of equilibrium are due also to other factors, as for instance the variation in the supply of rail transport, the fluctuations in the price of diesel fuel, the restrictions imposed by the Austrian government on road traffic of goods. However we should observe that, while we have proved in this paper that the congestion on the motorway, which is documented with certainty, gives rise to periodic oscillations of the costs from which periodic oscillations of equilibrium derive, the fact that other factors, like those mentioned above, give rise to periodic fluctuations of equilibrium, is only a conjecture that should be proved.

The high value of both the length of the period and the amplitude of the oscillations we observe in the figure indicates that a notable fractions of carriers move from motorway to railway and vice-versa following the cost variations due to the variations of the level of congestion. The impulsive attitude of carriers, who move from an alternative to the other in proportion variable randomly over time and different for the various carriers, gives account of the irregular evolution shown in Fig. 1, different from that extremely regular of Fig. 8, obtained by a mathematical model.

4. Conclusions

In conclusion of this paper we can maintain that the state of equilibrium of an innovation introduced in the transport world in competition with a traditional alternative, represented by a series of periodic oscillations of the proportions of utilizations around a value constant over time is due, at least in part, to the fact that the number of utilizations in the unit of time has exceeded the capacity of the transport system based on the innovation, because of the failure to adapt the characteristics of the system to the increase over time in the number of utilizations.

An example of this state of equilibrium is given by Fig. 1, which shows a sequence of periodic oscillations, around an average constant value, of the proportion of the tons of goods carried on motorway at the Brenner pass in competition with the railway, between 1994 and 2014. Actually the Brenner motorway, entered into operation in 1974, has not adapted its original geometric characteristics – two unidirectional carriageways with two lanes per carriageway – to the extraordinary increase in traffic of heavy vehicles.

The dynamic model presented in this paper has shown that, while the progressive adaptation of the characteristics of the transport system based on the innovation, to the extent that congestion is avoided, gives rise to an evolution that follows the S-shaped curve typical of innovations, the failure to adapt interrupts this evolution when the congestion level reaches a value deemed not bearable by users, giving rise to a different evolution which reaches, after a short transition period, an equilibrium state identified by periodic oscillations around an average value rather less than the asymptotic value to which the S-shaped curve tends.

The equilibrium configuration depends on the attitude

trasferita da un'alternativa all'altra seguendo le variazioni di costo, il sistema tende verso una configurazione di equilibrio periodico, in cui sia la durata del periodo che l'ampiezza delle oscillazioni sono tanto più grandi quanto maggiore è la proporzione degli utilizzi trasferiti nell'unità di tempo da una alternativa all'altra.

Appendice

Supponiamo che sia nota una sequenza \hat{x}_2^t delle proporzioni di utilizzi dell'alternativa innovativa, registrata in una sequenza Σ di tempi t . Possiamo utilizzare questa sequenza per stimare il valore del parametro β ed i coefficienti delle funzioni di costo in modo che i valori di x_2^t generati dalla prima delle Eq. (7) siano il più possibili vicini agli \hat{x}_2^t . Supponiamo inoltre che anche la seconda delle Eq. (7), generatrice dei T^t , sia nota per cui, partendo dal valore iniziale T^0 , è nota anche la sequenza dei T^t nei successivi tempi di Σ . Indichiamo con $\mathbf{a}_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2})^T, i = 1, 2$, i vettori dei coefficienti delle funzioni di costo $c_i(x_i^t T^t), i = 1, 2$. Avendo assegnato valori al parametro β e ai vettori \mathbf{a}_i , l'iterata applicazione della prima delle Eq. (7), dove \tilde{x}_2^{t+1} è dato dalla Eq. (5), partendo dai valori iniziali T^0 e $x_2^0 = \hat{x}_2^0$, fornisce la sequenza $\{x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta\}$ di x_2^t nei successivi tempi della sequenza Σ . I valori di β e dei vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 che minimizzano la somma degli scarti quadratici $[\hat{x}_2^t - (x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)]^2$ per tutti i tempi della sequenza Σ sono assunti come stime di β, \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 .

Quindi le stime sono ottenute risolvendo il seguente problema:

$$\min_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta} \Phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) \quad (12)$$

dove:

$$\Phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) = \sum_{\forall t \in \Sigma} \left[\hat{x}_2^t - (x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) \right]^2$$

Non riusciamo a definire l'espressione analitica di $\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)$, per cui la soluzione del problema in Eq. (12) è ottenuta attraverso una sequenza di passi in ciascuno dei quali si sceglie un insieme di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta$ e si calcola il corrispondente valore di $\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)$. La procedura è ripetuta finché un criterio di arresto è soddisfatto. Fra i vari algoritmi che possono essere utilizzati, nell'applicazione presentata nella Sezione 3 di questo articolo è stato scelto il metodo del simplesso discendente proposto da NELDER e MEAD [21]. Una presentazione della versione del metodo di NELDER e MEAD adatta alla soluzione del problema in Eq. (12) è in [12].

of users. If the latter react with caution to cost variations, the proportion of utilizations tends, after a series of small oscillations, towards a unique equilibrium value, rather less than which would have been reached in the absence of congestion. Instead, if users react impulsively, so that a remarkable part of them move from an alternative to the other following the cost variations, the system tends towards a periodic equilibrium configuration, in which both the length of the period and the amplitude of oscillation are the greater the higher the proportion of those who move from an alternative to the other is.

Appendix

We suppose that a sequence \hat{x}_2^t of proportions of utilizations of the innovative alternative, registered in a sequence Σ of times t , is known. We can use this sequence to estimate the value of parameter β and the coefficients of cost functions in such a way that the values of x_2^t generated by the first of Eq. (7) are as close as possible to \hat{x}_2^t . Moreover we assume that also the second of Eq. (7) that generates T^t is known, and hence, starting with an initial value T^0 , so is the sequence of T^t in the successive times of Σ . We denote by $\mathbf{a}_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2})^T, i = 1, 2$, the vectors of coefficients of cost functions $c_i(x_i^t T^t), i = 1, 2$. Having assigned a value of parameter β and vectors \mathbf{a}_i , the iterated application of the first Eq. (7), where \tilde{x}_2^{t+1} is given by Eq. (5), starting with the initial values T^0 and $x_2^0 = \hat{x}_2^0$, computes the sequence $\{x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta\}$ of x_2^t in the successive times of sequence Σ . The values of β and of vectors \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 that minimize the sum of the square deviations $[\hat{x}_2^t - (x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)]^2$ for all times of sequence Σ are assumed as estimates of β, \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 .

Thus the estimates are obtained by solving the following problem:

$$\min_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta} \Phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) \quad (12)$$

where:

$$\Phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) = \sum_{\forall t \in \Sigma} \left[\hat{x}_2^t - (x_2^t | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta) \right]^2$$

We cannot define the analytic expression of $\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)$, and the solution of problem Eq. (12) is obtained through a sequence of steps, in each of which a set of $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta$ is chosen, and the corresponding value of $\phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta)$ is computed. The procedure is computed until a stop criterion is satisfied. Among the various algorithms that could be used, in the application presented in Section 3 of this paper we have chosen the downhill simplex by NELDER and MEAD [21]. A presentation of the version of the method of NELDER and MEAD suitable for the solution of problem Eq. (12) is in [12].

BIBLIOGRAFIA - REFERENCES

- [1] ACEA (2020), "European Automobile Manufacturers' Association". New passenger car registrations by country. Historical series 1990-2020.
- [2] ACEA (2021), "European Automobile Manufacturers' Association". Diffusione delle stazioni di ricarica per auto elettriche nell'Unione Europea.
- [3] AFTABUZZAMAN M., MAZIOUM E. (2011), "Achieving sustainable urban transport mobility in post peak oil era". Transport Policy 38, 695-702.
- [4] ALPINFO (1994-2014), "Traffico merci attraverso le Alpi".
- [5] ANSA Motori (2021), Le auto elettriche percorrono più chilometriche delle termiche in Europa.
- [6] BISCHI G.I., CARINI R., GARDINI L., TENTI P. (2004), "Sulle orme del caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici". Bruno Mondadori.
- [7] BUDDE CHRISTENSEN T. (2011), "Modularised eco-innovation in the auto industry". Journal of cleaner production 128, 212-220.
- [8] COCCIA M. (2016), "Sources of technological innovations: Radical and incremental innovation problem-driven to support competitive advantage of firms". Technological analysis & strategic management, 1-14.
- [9] DALLA CHIARA B., PELLICELLI M. (2016), "Sustainable road transport from the energy and modern society points of view: Perspectives for the automotive industry and production". Journal of Cleaner production 133, 1283-1301.
- [10] DEWAR R.D., DUTTON J.E. (1986), "The adoption of radical and incremental innovations: an empirical analysis". Management Sciences, Vol. 32, 1422-1433.
- [11] FEIGENBAUM M. (1983), "Universal behaviour in nonlinear systems". Physics 7D, 16-39.
- [12] FERRARI P. (2002), "Road network toll pricing and social welfare". Transp. Res. B 36, 471-483.
- [13] FERRARI P. (2021), "Il processo di diffusione dell'auto elettrica". Ingegneria Ferroviaria 6, 495-508.
- [14] FERRARI P. (2021), "Un esempio di instabilità nei processi di innovazione dei trasporti: ascesa e caduta nell'auto Diesel in Europa". Ingegneria Ferroviaria 11, 871-886.
- [15] GABBON M., HOGG G. (1999), "Consumer involvement in services: a replication and extension". Journal of Business Research 46, 159-166.
- [16] GOLDMAN T., GORHAM R. (2006), "Sustainable urban transport: four innovative directions". Technology and society, 261-273.
- [17] IEA - International Energy Agency (2020), "Global EV outlook", www.iea.org.
- [18] JALONEN H. (2012), "The uncertainty of innovation: A systematic review of the literature", Journal of Management Research, Vol. 4, n. 1, 1-47.
- [19] KANNINEN B.G. (1996), "Intelligent transport systems: An economic and environmental policy assessment". Transport Policy 30, 1-10.
- [20] LUTHJE C. (2004), "Characteristics of innovating users in a consumer goods field: an empirical study of sport-related product consumer". Technovation 24, 683-695.
- [21] NELDER J.A., MEAD R. (1965), "A simplex method for function minimization". The Computer Journal 7, 308-313.
- [22] ORR G. (2003), "Diffusion of innovations", Academia Edu.
- [23] PHILLS JR., DEIGLMEIER K., MILLER D.T. (2008), "Rediscovering social innovation". Stanford Social Innovation Review 6, 34.43.
- [24] ROGERS E.M. (2007), "Diffusion of innovations". In Knowledge and innovation management (Hoffmann V. Ed.) Universitat Hohenheim, 37-50.
- [25] ROSS T., VALERIE A., MITCHELL, MAY A.J. (2012), "Bottom-up grassroots innovation in transport: motivations, barriers and enablers". Transportation planning and technology, 469-489.
- [26] THOMPSON, J.M.T., STEWART, H.B. (1986), "Non linear dynamics and chaos". John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- [27] WIESENTAL T., CONDEGO-MELHORADO A., LEDUC G. (2015), "Innovation in the European transport sector". Transport Policy 42, 86-93.