

## Il modello “Clessidra”

*The “Hourglass” model*

Dott. Ingg. Chiara COLOMBARONI<sup>(\*)</sup>, Lorenzo DOMENICHINI<sup>(\*\*)</sup>, Giorgio SALERNO<sup>(\*\*)</sup>

**Sommario** - Quando si verifica un'anomalia della circolazione autostradale con drastica riduzione della capacità, è frequente il costituirsi quasi immediato di una coda. La nota illustra una metodologia generalizzata per la stima del tempo necessario a percorrere una tratta all'interno della quale si sia verificata un'anomalia (anche parziale) con creazione della coda e con diverse possibili evoluzioni temporali della liberazione della sezione. Il metodo è applicabile a situazioni reali in una infrastruttura autostradale con lo scopo primario di fornire una corretta informazione all'utenza tramite un pannello a messaggio variabile posizionato in una sezione a monte dell'anomalia.

La metodologia è stata messa a punto nell'ambito di una convenzione di ricerca stipulata tra la società Autostrade per l'Italia SpA e il Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Firenze.

## 1. Presentazione del modello Clessidra

Esiste un gran numero di formalizzazioni per il fenomeno rappresentato in questo articolo, ma l'approccio che qui si presenta costituisce uno schema originale mediante il quale è possibile modellizzare un'intera famiglia di processi che nella realtà si possono presentare sovente con un forte impatto sull'utenza automobilistica ed in particolare su quella autostradale.

Quando si verifica un'anomalia della circolazione con drastica riduzione della capacità, è frequente il costituirsi quasi immediato di una coda a monte della sezione dell'anomalia. Il modello che si presenta ha come obiettivo quello di stimare il tempo necessario per superare l'anomalia e raggiungere una sezione a valle di questa, dove le condizioni di flusso sono misurate. Tale modello è valido per un veicolo che si immetta nel sistema, che non abbia alternative di percorso e che raggiunga la coda prima che questa si dissolva e la circolazione torni alla normalità. E' questo un caso tipico in conseguenza di un incidente o altra anomalia significativa in un tronco autostradale. La ricerca che ha portato alla definizione dello schema che si presenta prende spunto dal tentativo di trovare un modo corretto di preavvisare l'utente comunicandogli una stima sufficientemente corretta del perditempo che dovrà subire, anche in relazione alle misure che il gestore prevede di applicare per la sicurezza e per la fluidificazione del deflusso.

**Summary** - When there is an anomaly of the motorway traffic with drastic reduction of capacity, the almost immediate establishment of a queue is frequent. The note shows a generalized methodology to estimate the time needed to travel along a route in which an incident has occurred (even partial) forming a queue and with several possible time evolutions to free the section. The method is applicable to real situations in a motorway infrastructure with the primary purpose of providing correct information to users by means of variable message panels placed in a section upstream of the incident. The methodology was developed under a research agreement stipulated between the company Autostrade per l'Italia SpA and the Department of Civil and Environmental Engineering at the University of Florence.

## 1. Presentation of the Hourglass model

There is a large number of formulations for the phenomenon represented in this article, but the approach here proposed is an original scheme whereby an entire family of processes, that in reality can often occur with a strong impact on the automotive consumer, and in particular on road users, can be modelled. When there is an anomaly in circulation with drastic reduction of capacity, the almost immediate occurrence of a queue upstream of the anomaly section is frequent.

The model presented has the purpose of estimating the time required to overcome the problem and reach a section downstream of the incident, where the flow conditions are measured.

This model is valid for a vehicle entering the system, which has no alternative path and that reaches the queue before it dissolves and circulation is back to normal.

This is a typical case as a result of an accident or other significant anomaly in a motorway section.

The research that led to the definition of the scheme presented takes its cue from the attempt to find a proper way to give prior information to the user giving the latter a sufficiently correct estimate of the waste of time it must suffer, even in relation to the measures that the operator intends to apply for safety and to ease the outflow.

Several recent studies have dealt with the topic “travel

<sup>(\*)</sup> Università di Roma “La Sapienza”.

<sup>(\*\*)</sup> Università di Firenze.

<sup>(\*)</sup> University of Rome “La Sapienza”.

<sup>(\*\*)</sup> University of Florence.

Diverse ricerche recenti hanno trattato l'argomento relativo alla stima del tempo di percorrenza in caso di anomalia e in presenza di misure di flusso, con un'attenzione particolare alle tecniche di rilevamento per ricostruire le traiettorie spazio-temporali dei veicoli: NAM e DREW [1], LI e McDONALD [2], COIFMAN [3] e CHUNG e altri [4]. Questo articolo segue l'approccio della teoria macroscopica del deflusso. Tale argomento è stato trattato in forme diverse nei classici testi sul deflusso veicolare, quali Lighthill e Whitham [5], Newell [6] e Daganzo [7], in cui, però, non è presente un schema unificato per il calcolo del ritardo dei veicoli in campo autostradale. Gli studi appena citati sono fondati su un modello dinamico del primo ordine in cui la dinamica del deflusso veicolare assume che i veicoli adeguino istantaneamente la propria velocità ad eventuali variazioni di densità nello stesso punto.

PAYNE [8] introdusse i modelli del secondo ordine, che intendevano migliorare il modello del primo ordine introducendo delle relazioni aggiuntive che tengono conto dell'impossibilità dei conducenti di aggiornare istantaneamente la velocità alla densità di traffico, ottenendo un modello che esprime il legame tra il gradiente della velocità e la variazione di densità.

Nel 2002 fu implementato un modello del secondo ordine nel software METANET da Kotsialos e altri [9], che ha trovato diverse applicazioni pratiche per il controllo e la regolazione del traffico, quali il ramp metering [10] e i limiti variabili di velocità [11] che potrebbero essere integrate dal modello che si presenta.

Nel modello che si presenta si è adottato uno schema rigidamente deterministico perché capace di cogliere la sostanza del fenomeno in modo chiaro, diretto e con la giusta approssimazione.

Si è deciso di definirlo Modello Clessidra per l'evidente analogia del suo schema interpretativo con il funzionamento di una clessidra come evidenziato in fig. 1.

Prima dell'era degli orologi digitali e prima ancora di quelli meccanici, la maggior precisione nella misura degli intervalli di tempo la si otteneva mediante l'uso di una

time estimation in case of anomalies and flow measures, with particular attention to detection techniques to reconstruct the space-time trajectories of vehicles: NAM e DREW [1], LI and McDONALD [2], COIFMAN [3] e CHUNG and others [4].

This article follows the approach of the macroscopic flow theory.

This topic has been discussed in different forms in classic texts on vehicular flow, such as Lighthill and Whitham [5] Newell [6], and Daganzo [7], in which, however, there is no unified scheme for the calculation of the delay of vehicles in the motorway field.

The studies just mentioned are based on a dynamic model of first order in which the dynamics of vehicular flow assume that vehicles conform their speed instantly at any density variations in the same point.

PAYNE [8] introduced the second-order models, intended to improve the first-order model by introducing additional relations that take into account the inability of drivers to instantly update the speed to the density of traffic, resulting in a model that expresses the relationship between the gradient of the speed and the density variation.

In 2002 a second order model was implemented by Kotsialos and others [9] in the METANET software, which found several practical applications for the control and regulation of traffic, such as ramp metering [10] and variable speed limits, [11] which may be supplemented by the model presented.

In the model presented, a strictly deterministic framework was adopted as it is capable of grasping the essence of the phenomenon in a clear, direct manner and with correct approximation.

It was decided to define it the Hourglass Model due to the obvious analogy of its interpretative scheme with an hourglass operation as shown in fig. 1.

Before the era of digital clocks and even before the mechanical ones, the most accurate measure of the time intervals was obtained using a sand hourglass. The hourglass is used to measure the time it takes for a grain of sand to reach the section that combines the two bulbs and fall into the lower one through a calibrated hole, from the position in which it is located in the upper bulb.

The time it takes depends on how many grains of sand have to pass through the bottle-neck before the grain considered and how many grains pass through the bottle-neck in the unit of time.

The real model of a sand hourglass is simplified by the hypotheses, suitable for the purposes, that the flow rate through the bottleneck remains constant.

The analogy with the transportation problem studied is immediate:

- the red sand grain is the  $i$ -th vehicle that queues;
- the number of sand grains that forego the red one is the number of vehicles queued up in front of the red one;
- the bottleneck is the motorway section in which the

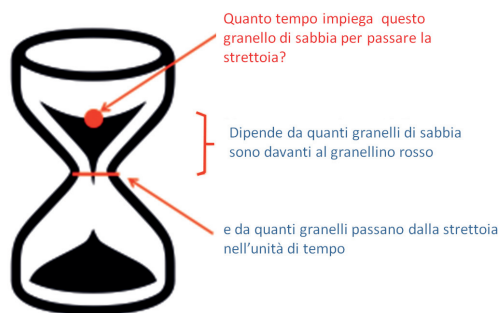


Fig. 1 - La clessidra a sabbia.  
Fig. 1 - The sand hourglass.

clessidra a sabbia. Con la clessidra si misura il tempo impiegato da un granello di sabbia a raggiungere, dalla posizione in cui si trova nel bulbo superiore, la sezione che unisce i due bulbi e cadere in quello inferiore attraverso un foro calibrato. Il tempo impiegato dipende da quanti granelli di sabbia debbono passare dalla strettoia prima del granello considerato e da quanti granelli passano dalla strettoia nell'unità di tempo.

Il modello reale di una clessidra a sabbia è semplificato dall'ipotesi, adeguata agli scopi, che la portata attraverso la strettoia rimanga costante.

L'analogia con il problema trasportistico studiato è immediata:

- il granellino di sabbia rosso è l'*i*-esimo veicolo che si accoda;
- il numero di granellini di sabbia che precedono quello rosso è il numero di veicoli in coda davanti a quello rosso;
- la strettoia è la sezione autostradale in cui si è verificato l'evento perturbatore che ha generato la riduzione dell'offerta capacitiva dell'infrastruttura;
- il tempo misurato dalla clessidra corrisponde al tempo che il veicolo *i*-esimo consuma dal momento in cui si accoda al momento in cui passa attraverso la sezione incidentata.

Per determinare il tempo speso in coda dal veicolo *i*-esimo è necessario determinare il numero di veicoli che lo precedono fino alla sezione incidentata e stimare il valore della capacità residua dell'infrastruttura nel punto in cui è presente l'evento perturbatore. Con questa metodologia è ininfluente l'effettiva distribuzione delle velocità nel tratto non perturbato precedente alla anomalia.

E' appunto questo il criterio alla base del modello sviluppato e la cui descrizione analitica è riportata nel paragrafo che segue.

Il modello può essere utilizzato per alimentare la logica di applicazione di un sistema di informazione con pannelli a messaggio variabile che avendo le misure di flusso a monte di una strozzatura forniscono agli utenti informazioni sul tempo previsto di superamento della strozzatura stessa.

Un sistema di questo genere può altresì essere integrato all'interno di un sistema più generale, quale un "Travel Planner", che consenta all'utente di ottimizzare la scelta anche tra modi di trasporto alternativi in funzione dei tempi di viaggio previsti.

## 2. Il sistema

Si analizzi un tronco autostradale definito da due sezioni di progressiva  $x_1$  ed  $x_2$  (con  $x_1 < x_2$ ). Si considerano note, in condizioni "normali", le caratteristiche del deflusso lungo la tratta e si assume che i tempi di percorrenza dell'intera tratta  $T_{12}$  e quelli di eventuali tratte intermedie siano ricavabili delle classiche leggi del deflusso

event occurred that caused the reduction of the infrastructure's capacitive offer;

- the time measured by the hourglass corresponds to the time that the *i*-th vehicle takes from the time of queuing to the time when it passes through the accident section.

To determine the time spent in the queue by the *i*-th vehicle the number of vehicles that precede it up to the accident section must be determined and the value of the residual capacity of the infrastructure at the point where the perturbation event is located must be estimated.

With this methodology the actual distribution of speed in the stretch not disturbed before the anomaly is irrelevant.

This is precisely the criterion underlying the model developed and whose breakdown is reflected in the paragraph that follows.

The model can be used to power the application logic of an information system with variable message signs that, having flow measures upstream of a bottle-neck, provide users with information about the expected time of overcoming the bottleneck itself.

A system of this kind may also be integrated within a more general system, such as a "Travel Planner", which allows the user to optimise the choice among alternative modes of transport on the basis of expected travel times.

## 2. The system

Let us analyse a motorway stretch defined by two sections of kilometric point and (with  $x_1 < x_2$ ). In "normal" conditions, the characteristics of the outflow along the route are considered as known and it is assumed that the travel time  $T_{12}$  of whole route and those of any intermediate sections can be obtained from the classic vehicle flow laws such as stationary ones obtainable from the basic relationship

$$q = k \cdot v.$$

and also from any available data collected in the field (Tutors, DSRC/RFID, Telepass detectors).

The case when, in an intermediate section of kilometric point  $x_a$ , starting from a time instant  $\tau_a$ , there is an anomaly that would considerably reduce the system capacity at that point, should instead be modeled specifically.

In this case the travel time estimate based on direct measurements of travel times of vehicles outgoing from a road stretch (Tutors and Telepass detectors) is not reliable, because the vehicle queue is evolving and therefore the travel time of a vehicle coming out from the stretch at the generic time *t* is different from that of the incoming vehicle at the same time *t* and recipient of the information.

The anomaly can be completely described by a  $c_a(t)$  function, which provides the evolution over time of the capacity in the  $x_a$  section.

Finally, the vehicle load on the system will be described

veicolare quali quelle stazionarie ricavabili dalla relazione fondamentale

$$q = k \cdot v.$$

e anche dagli eventuali dati disponibili raccolti direttamente sul campo (Tutor, DSRC/RFID, boe Telepass).

Dovrà invece essere modellizzato in modo specifico il caso in cui in una sezione intermedia di progressiva  $x_a$ , a partire da un istante  $\tau_a$ , si abbia un'anomalia tale da ridurre in modo sensibile la capacità in quel punto del sistema.

In questo caso la previsione dei tempi di percorrenza basata su rilevazioni dirette dei tempi di percorrenza dei veicoli uscenti da un tronco stradale (Tutor e boe Telepass) non sono attendibili, perché la coda veicolare è in evoluzione e quindi il tempo di percorrenza di un veicolo uscente dal tronco al generico tempo  $t$  è differente da quello del veicolo entrante allo stesso tempo  $t$  e destinataro dell'informazione.

L'anomalia potrà essere compiutamente descritta tramite una funzione  $c_a(t)$ , che fornisca l'evoluzione nel tempo della capacità nella sezione  $x_a$ .

Infine, il carico veicolare sul sistema sarà descritto tramite la portata  $c_a(t)$ , sulla sezione  $x_1$ , e dalle condizioni iniziali del sistema all'istante  $\tau_a$ . Ai fini del calcolo del tempo di percorrenza  $T_{12}$ , le condizioni iniziali sono compiutamente rappresentate dal numero  $N_{1a0}$  di veicoli presenti nella tratta  $(x_1, x_a)$  all'istante  $\tau_1$ .

### 3. Il modello base $T_{1a}(t_1)$

Il tempo di percorrenza  $T_{12}(t_1)$  necessario al veicolo che entra nel sistema dalla sezione  $x_1$  al tempo  $t_1$  per percorrere l'intera tratta, è la somma del tempo  $T_{1a}$  (dall'ingresso alla sezione dell'anomalia) e del tempo  $T_{2a}$  (dalla sezione dell'anomalia all'uscita dal sistema). Questo secondo termine è calcolabile con le abituali relazioni del deflusso veicolare e verrà esplicitato in seguito. In questo paragrafo si tratterà quello che è stato definito il modello base, ossia la stima del tempo del tempo necessario per superare la sezione dove si è verificata l'anomalia.

Il massimo numero di veicoli che a partire dall'istante  $\tau_a$  può transitare nella sezione fino al generico istante  $t > \tau_a$  si calcola integrando la funzione di capacità  $c_a$

$$C_a(t) = \int_{\tau_a}^t c_a(\theta) d\theta \quad (1)$$

che, sotto l'ipotesi che nella sezione  $x_a$  sia presente fin dall'istante  $\tau_a$  una coda che alimenta costantemente il deflusso, rappresenta altresì il numero di veicoli che sono effettivamente transitati dall'istante  $\chi$  all'istante generico  $t$ . Pertanto, un generico veicolo che si trovi (o che si troverà) al posto  $n$  della coda che inizia a formarsi all'istante  $\tau_a$ , attraverserà la sezione dell'anomalia proprio quando il valore della (1) sarà pari ad  $n$ .

Per individuare il posto  $n$  nella coda che spetta al generico veicolo che transita in  $x_1$  al tempo  $t_1$  è sufficiente

using the flow rate  $q_1(t)$  at the  $x_1$  section, and from the initial conditions of the system at instant  $\tau_a$ .

For the purposes of calculating the  $T_{12}$  travel time, the initial conditions are fully represented by the number  $N_{1a0}$  of vehicles present in the stretch  $(x_1, x_a)$  at instant  $\tau_a$ .

### 3. The base model $T_{1a}(t_1)$

The travel time  $T_{12}(t_1)$  required by the vehicle entering the system from section  $x_1$  at time  $t_1$  to run the whole stretch, is the sum of the time  $T_{1a}$  (from the entrance to the section of the anomaly) and the time  $T_{2a}$  (from the section of the anomaly to the exit from the system).

This second period is computable with the usual vehicular flow rates and will be explained later. In this section we will deal with what has been described as the base model, which is the estimated time of how long it takes to go through the section where the anomaly occurred.

The maximum number of vehicles that starting from the time instant  $\tau_a$  can pass through the section until the generic instant  $t > \tau_a$  is calculated by integrating the capacity function  $c_a$

$$C_a(t) = \int_{\tau_a}^t c_a(\theta) d\theta \quad (1)$$

that, under the assumption that a queue is present at the section  $x_a$  that constantly feeds the outflow from the time instant  $x_a$  also represents the number of vehicles that have actually passed from the time instant  $\tau_a$  to the generic time instant  $t$ .

Therefore, any vehicle that is (or will be) at  $n$  position of the queue that begins to form at the time instant  $\tau_a$  will cross the section of the anomaly just when the value of (1) will be equal to  $n$ .

To identify the  $n$  position in the queue that belongs to the generic vehicle that passes in  $x_1$  at the time  $t_1$  just add to the number of vehicles already present in the system  $N_{1a0}$  the number of vehicles that have passed on  $x_1$  before it:

$$N_1(t_1) = N_{1a0} + \int_{\tau_1}^{t_1} q_1(\theta) d\theta \quad (2)$$

Therefore, being the position  $n$  known in the queue, the model is solved with the expression

$$T_{1a} = T_{1a}[n(t_1)] \quad (3)$$

and imposing the condition

$$C_a(t_1) = n \quad (4)$$

To explain the dependence of  $T_{1a}$  from  $t_1$ , reverse the function (1):

$$H_a(n) = C_a^{-1}(n) \quad (5)$$

The  $H_a(n)$  function gives the transit time of the  $n$ -th vehicle queued on section  $x_a$ .

A more general interpretation of  $H_a(n)$  is that of the first absolute time instant in which the  $n$ -th vehicle can transit for section  $x_a$ , which will coincide with the actual transit only in case of a permanent queue. It is therefore clear that in this case - in which this condition is assumed

sommare al numero di veicoli già presenti nel sistema  $N_{ia0}$  il numero di veicoli che son transitati su  $x_i$  prima di esso:

$$N_i(t_i) = N_{ia0} + \int_{t_{ia0}}^{t_i} q_i(\vartheta) d\vartheta \quad (2)$$

Quindi, noto il posto  $n$  nella coda, il modello è risolto esplicitando l'espressione

$$T_{ia} = T_{ia} [n(t_i)] \quad (3)$$

ed imponendo la condizione

$$C_a(t_i) = n \quad (4)$$

Per esplicitare la dipendenza di da  $T_{ia}$ ,  $t_i$  s'inverte la funzione (1):

$$H_a(n) = C_a^{-1}(n) \quad (5)$$

La funzione  $H_a(n)$  restituisce l'istante di transito dell' $n$ -esimo veicolo in coda sulla sezione  $x_a$ .

Un'interpretazione più generale di  $H_a(n)$  è quella del primo istante in assoluto che l' $n$ -esimo veicolo può transitare per la sezione  $x_a$ , che coinciderà con l'effettivo passaggio solo nel caso di coda permanente. E' evidente, pertanto, che nel caso in esame - nel quale questa condizione è presupposta - sottraendo ad  $H_a(n)$  l'istante d'ingresso nel sistema  $t_i$  si ottiene il tempo di percorrenza  $T_{ia}$  cercato:

$$T_{ia} = H_a(n) - t_i \quad (6)$$

Si noti che la funzione  $C_a(t_i)$  è invertibile perché non decrescente a causa della non negatività della  $c_a(t)$ . Per gli intervalli di tempo in cui la funzione risultasse costante, il che si verifica quando la  $c_a(t)$  è nulla, si assumerà come valore della funzione inversa il massimo valore dell'intervallo stesso.

Come detto, è necessario esplicitare del tutto la dipendenza da  $t_i$  per ottenere il modello nella forma voluta, il che si ottiene esprimendo nella (6) tramite la (2):

$$T_{ia}(t_i) = H_a[N_i(t_i)] - t_i \quad (7)$$

La relazione (7) formalizza il modello base.

### 3.1. Condizioni di validità del modello base e calcolo delle condizioni iniziali

Si è già detto che il modello base presuppone che sulla sezione  $x_a$  sia sempre presente una coda che alimenti costantemente il deflusso secondo la capacità  $c_a$ . Ai fini della descrizione del modello ci si limita ad utilizzare nuovamente l'ipotesi che le condizioni di deflusso siano note nella sezione  $x_1$  rappresentate dalla  $q_1$  e che da esse sia possibile ricavare quella che sarebbe la velocità media  $v_{ia}$  lungo il tratto da  $x_1$  ad  $x_a$  in assenza di coda<sup>(1)</sup>. Si può esplicitare la condizione di validità con la seguente rela-

- subtracting the input instant  $t_i$  in the system from  $H_a(n)$  results in the running time  $T_{ia}$  searched for:

$$T_{ia} = H_a(n) - t_i \quad (6)$$

Note that the  $C_a(t)$  function is invertible because non-decreasing due to the non-negativity of the  $C_a(t)$ . For time intervals where the function is constant, which occurs when the  $C_a(t)$  is zero, the maximum value of the range itself will be assumed as the value of the inverse function.

As mentioned, the dependence from  $t_i$  has to be completely explicit in order to obtain the model in the desired structure; this is achieved by expressing  $n$  in (6) through (2):

$$T_{ia}(t_i) = H_a[N_i(t_i)] - t_i \quad (7)$$

The relation (7) formalizes the base model.

### 3.1. Validity conditions of the base model and calculation of initial conditions

As already said the basic model assumes that on the section  $x_a$  there is always a queue that constantly feeds the outflow according to the capacity  $c_a$ .

For the purposes of the description of the model we will limit ourselves to using the hypotheses again that the outflow conditions are known in section  $x_1$  represented by  $q_1$ , and that from these it is possible to derive what would be the average speed  $v_{ia}(t)$  along the stretch from  $x_1$  to  $x_a$  in the absence of a queue<sup>(1)</sup>. The condition of validity can be made explicit in the following relation, which will be true if the queue is reached:

$$T_{ia}(t_i) > \frac{x_a - x_1}{v_{ia}(t_i)} \quad (8)$$

This condition is not formally integrated in the model, leaving to the processing code procedure the duty to carry out the calculation consistently with the condition itself. Similarly, we do not enter on the merits of the calculation of the initial conditions represented by the number  $N_{ia0}$  of vehicles in the stretch  $(x_1, x_a)$  at the time instant  $\tau_a$ , simply assuming it is known or calculable from the outflow conditions in that section which are supposed to be known along an adequate period of time before the instant  $\tau_a$  itself.

### 4. The general model $T_{12}(t_1)$

The general model is formed by the base model  $T_{ia}$  which should be added to the time  $T_{a2}$  needed to run the stretch  $(x_a, x_2)$  once past the  $x_a$  section.

Disregarding, as usual, the short local transient, the av-

<sup>(1)</sup> Il modello si adegua alla prassi della comunicazione all'utenza dei tempi di percorrenza previsti, come la previsione di dare un unico tempo di percorrenza, che prescinde dalla distribuzione degli utenti in più classi a ciascuna delle quali potrebbe competere un tempo di percorrenza differente. Il modello sarebbe facilmente estendibile a classi di veicoli diverse nel caso si volesse dare un'informazione differenziata, considerando il valore medio di ciascuna classe.

<sup>(1)</sup> The model adapts to the practice of user information of the expected running times such as the prospect of giving one single running time, regardless of the distribution of users in multiple classes each of which could be associated to a different running time. The model would be easily extensible to different vehicle classes should one want to give separate information, considering the average value of each class.



zione che risulterà vera nel caso che la coda venga raggiunta:

$$T_{1a}(t_1) > \frac{x_a - x_1}{v_{1a}(t_1)} \quad (8)$$

Non si integra formalmente questa condizione nel modello, lasciando alla procedura del codice di elaborazione il compito di eseguire il calcolo coerentemente alla condizione stessa.

Uguale, non si entra nel merito del calcolo delle condizioni iniziali rappresentate dal numero veicoli all'interno della tratta  $(x_1, x_a)$  all'istante  $\tau_a$ , presupponendolo semplicemente noto o calcolabile dalle condizioni di deflusso in quella sezione che s'ipotizza siano note lungo un adeguato periodo precedente l'istante  $\tau_a$  stesso.

#### 4. Il modello generale $T_{12}(t_1)$

Il modello generale è formato dal modello base  $T_{1a}$  cui va aggiunto il tempo  $T_{a2}$  necessario per percorrere il tratto  $(x_a, x_2)$  una volta superata la sezione  $x_a$ . Trascurando, come d'abitudine, il breve transitorio locale, si può calcolare la velocità media a valle della sezione  $x_a$  mediante la specifica curva di deflusso in condizioni indisturbate. Il valore della portata da utilizzare, sarà proprio la capacità della sezione  $x_a$  all'istante in cui si presenta il veicolo in esame:

$$c_a[t_1 + T_{1a}(t_1)]$$

Indicando questa velocità con  $v_{a2}[t_1 + T_{1a}(t)]$ , si ottiene il modello generale:

$$T_{12}(t_1) = T_{1a}(t_1) + \frac{x_2 - x_a}{v_{a2}[t_1 + T_{1a}(t_1)]} \quad (9)$$

##### 4.1. Condizione di validità del modello generale

Anche nel caso del modello generale si ipotizza che il veicolo che entra nel sistema al tempo  $t_1$ , raggiunga la coda causata dall'anomalia. Il raggiungimento della coda può avvenire sia prima che dopo la sezione  $x_a$ . Può essere allora scritta la condizione di validità del modello generale del tutto analoga alla (8):

$$T_{12}(t_1) > \frac{x_2 - x_1}{v_{12}(t_1)} \quad (10)$$

in cui  $v_{12}$  ha l'analogo significato di  $v_{1a}$  nella (8). Si noti che la condizione (10) è comprensiva della (8).

#### 5. Deduzione di alcuni semplici modelli

Dal modello generale espresso dalla (9) si ricava qualsiasi modello una volta esplicitate le due funzioni  $c_a(t)$  e  $q_1(t)$ . Nei paragrafi seguenti si esplicitano i casi più rilevanti in pratica, con il flusso in entrata costante e la capacità che varia in modo discontinuo in alcuni istanti ed è costante altrove. Rientrano in questa casistica una chiusura totale della carreggiata con una liberazione completa, oppure con l'apertura parziale di una corsia e

erage speed downstream the  $x_a$  section can be calculated through the specific flow curve in undisturbed conditions.

The value of the flow rate to be used, will be exactly the capacity of the  $x_a$  section at the time instant in which the vehicle under consideration appears:

$$c_a[t_1 + T_{1a}(t_1)]$$

Indicating this speed with  $v_{a2}[t_1 + T_{1a}(t)]$ , the general model is obtained:

$$T_{12}(t_1) = T_{1a}(t_1) + \frac{x_2 - x_a}{v_{a2}[t_1 + T_{1a}(t_1)]} \quad (9)$$

##### 4.1. Validity condition of the general model

Even in the case of the general model it is assumed that the vehicle that enters the system at the time instant  $t_1$  reaches the queue caused by the anomaly. Reaching the queue can occur both before and after the  $x_a$  section. Therefore the condition of validity of the general model quite similar to (8) can be written:

$$T_{12}(t_1) > \frac{x_2 - x_1}{v_{12}(t_1)} \quad (10)$$

where  $v_{12}$  has the same meaning of  $v_{1a}$  in (8). Please note that the condition (10) is inclusive of (8).

#### 5. Deduction of some simple models

From the general model expressed by (9) any model can be derived once made explicit the two functions  $c_a(t)$  and  $q_1(t)$ . In the following paragraphs the most relevant cases in practice will be explained, with a constant incoming flow and a capacity that ranges discontinuously in some time instants and is constant in others. A total closure of the roadway with a complete clearing or with the partial and then total opening of one lane or with any other discrete-step evolution fall in this case study.

##### 5.1. Total closure and complete clearing

Let us assume the flow rate as constant:

$$q_1(t) = \text{cost} \quad (11)$$

while the capacity  $c_a(t)$  is zero up to a time instant  $\tau_q$  and has a value  $c_q$  from that instant onwards:

$$c_a(t) = c_q(t \geq \tau_q) \quad (12)$$

(the bracketed expression must be understood as a logical multiplier indicator, with a value of 1 if the condition is true and 0 if false).

By integrating these functions the  $C_a$  and the  $N_1$  are calculated:

$$c_a(t) = \int_m c_q d\theta = \int_{t_q} c_q d\theta = c_q(t - \tau_q) \quad (13)$$

$$N_1(t) = N_{1a0} + \int_m q_1 d\theta = N_{1a0} + q_1(t - \tau_a) \quad (14)$$

Reversing the (13) you get the function  $H_a(n)$ :

$$H_a(n) = C_a^{-1}(n) = \tau_q + \frac{n}{c_q} \quad (15)$$

poi totale, oppure con una qualsiasi altra evoluzione per passi discreti.

### 5.1. Chiusura totale e liberazione completa

Si supponga costante la portata  $q_1(t)$ :

$$q_1(t) = \text{cost} \quad (11)$$

mentre la capacità  $c_a(t)$  sia nulla fino ad un istante  $\tau_q$  ed abbia un valore  $c_q$  da quell'istante in poi:

$$c_a(t) = c_q \quad (t \geq \tau_q) \quad (12)$$

(l'espressione tra parentesi deve essere intesa come un indicatore logico moltiplicatore, con valore 1 se la condizione è vera e 0 se falsa).

Integrando queste funzioni si calcolano la  $c_a$  e la  $N_1$ :

$$c_a(t) = \int_{\tau_q}^t c_q d\theta = \int_{\tau_q}^t c_q d\theta = c_q (t - \tau_q) \quad (13)$$

$$N_1(t) = N_{1a0} + \int_{\tau_q}^t q_1 d\theta = N_{1a0} + q_1(t - \tau_q) \quad (14)$$

Invertendo la (13) si ottiene la funzione  $H_a(n)$ :

$$H_a(n) = C_a^{-1}(n) = \tau_q + \frac{n}{c_q} \quad (15)$$

Inserendo per  $n$  il valore  $N_1$  calcolato con la (14) nel valore  $t_1$ , si ottiene l'istante  $t_a$  di attraversamento della sezione  $x_a$  e, sottraendo a questo l'istante  $t_1$ , il tempo di percorrenza  $T_{1a}$ :

$$T_{1a} = t_a - t_1 = H_a[N_1(t_1)] - t_1 = \tau_q + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_q)}{c_q} - t_1 \quad (16)$$

### 5.2. Chiusura totale ed apertura in due fasi

S'ipotizza che, dopo la chiusura totale avvenuta all'istante  $\tau_a$ , si abbia un'apertura parziale all'istante  $\tau_p$  con una capacità ridotta  $c_p$  e, ad un istante successivo  $\tau_q$ , con la capacità totale  $c_q$ .

In formula e con lo stesso uso formale delle condizioni logiche:

$$c_a(t) = c_p \quad (\tau_p \leq t < \tau_q) + c_q \quad (t \geq \tau_q) \quad (17)$$

Si consideri allora il numero  $N_p$  di veicoli che all'istante  $\tau_p$  hanno effettivamente attraversato la sezione  $x_a$ . E esso si calcola osservando che per tutto il periodo di apertura parziale il deflusso è stato costante con portata  $c_p$ , per cui:

$$N_p = c_p (\tau_q - \tau_p) \quad (18)$$

Per il calcolo del tempo di percorrenza del veicolo che entra nel sistema al tempo, si hanno due casi a seconda che il valore  $N_1(t_1)$ , calcolato sempre tramite la (14), sia o minore o maggiore di  $N_p$ : nel primo caso si utilizza il modello precedente senza nessuna modifica (a parte l'ovvia sostituzione di  $c_q$  con  $c_p$  e di  $\tau_q$  con  $\tau_p$ ), in quanto il veicolo non usufruirà dell'apertura totale perché sarà passato per  $x_a$  prima dell'istante  $\tau_q$ . Nel secondo caso, per valori di  $t$  tali che  $N_1(t) > N_p$ , la funzione  $C_a$  può essere espressa nel modo seguente:

$$c_a(t) = N_p + c_q (t - \tau_q) \quad (19)$$

By entering for  $n$  the value  $N_1$  calculated with (14) for  $t_1$ , the instant  $t_a$  of crossing of the  $x_a$  section is obtained and the  $T_{1a}$  running time is derived by subtracting the  $t_1$  instant from this:

$$T_{1a} = t_a - t_1 = H_a[N_1(t_1)] - t_1 = \tau_p + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_a)}{c_q} - t_1 \quad (16)$$

### 5.2. Total closure and opening in two phases

It is assumed that, after the total closure occurred at the time instant  $\tau_a$ , there is a partial opening at the instant  $\tau_p$  with a reduced  $c_p$  capacity and, at a later time instant  $\tau_q$  with total  $c_q$  capacity.

In formula and with the same formal use of logical conditions:

$$c_a(t) = c_p \quad (\tau_p \leq t < \tau_q) + c_q \quad (t \geq \tau_q) \quad (17)$$

Let us then consider the  $N_p$  number of vehicles that at the time instant  $\tau_p$  have actually crossed the  $x_a$  section. This is estimated by observing that throughout the whole period of partial opening the outflow was constant with flow rate  $c_p$  whereby:

$$N_p = c_p (\tau_q - \tau_p) \quad (18)$$

For the calculation of the running time of the vehicle that enters the system at time  $t_1$ , there are two cases depending on whether the value  $N_1(t_1)$ , always calculated by (14), is either less than or greater than  $N_p$ : in the first case the previous model without any changes is used (besides the obvious substitution of  $c_q$  with  $c_p$  and of  $\tau_q$  with  $\tau_p$ ), since the vehicle will not take advantage of the complete opening because it will have crossed  $x_a$  before the time instant  $\tau_q$ . In the second case, for values of  $t$  such that  $N_1(t) > N_p$ , the  $C_a$  function can be expressed as follows:

$$c_a(t) = N_p + c_q (t - \tau_q) \quad (19)$$

and the inverse function with

$$H_a n = C_a^{-1} = \tau_q + \frac{(n - N_p)}{c_q} \quad (20)$$

In this case also, by entering for  $n$  the value  $N_1$  calculated with (14) for  $t_1$ , the instant  $t_a$  of crossing of the  $x_a$  section is obtained and the  $T_{1a}$  running time is derived by subtracting the  $t_1$  time instant from this:

$$T_{1a} = t_a - t_1 = H_a[N_1(t_1)] - t_1 = \tau_q + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_a) - N_p}{c_q} - t_1 \quad (21)$$

### 5.3. Closure and opening in multiple phases

The case of an opening in phases is the generalization of the previous case, always with discontinuous variations of capacity. With this model a variety of situations can be handled, such as an initial closure at time  $t_a$  that is not complete but with a non-zero capacity and however whatever an evolution.

As mentioned, it is assumed that from the instant of the accident  $\tau_a = \tau_p$  the capacity varies in a discontinuous

e l'inversa con

$$H_a n = C_a^{-1} = \tau_q + \frac{(n - N_p)}{c_q} \quad (20)$$

Anche in questo caso, inserendo per  $n$  il valore  $N_1$  calcolato con la (14) nel valore  $t_1$ , si ottiene l'istante  $t_a$  di attraversamento della sezione  $x_a$  e, sottraendo a questo l'istante  $t_1$ , il tempo di percorrenza  $t_{1a}$ :

$$T_{1a} = t_a - t_1 = H_a [N_1(t_1)] - t_1 = \tau_q + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_a) - N_p}{c_q} - t_1 \quad (21)$$

### 5.3. Chiusura ed apertura in più fasi

Il caso di un'apertura realizzata in più fasi è la generalizzazione del caso precedente, sempre con variazioni discontinue della capacità. Con questo modello si possono trattare diverse situazioni, come ad esempio, una chiusura iniziale al tempo  $t_a$  che non sia completa ma con una capacità non nulla e comunque una qualsiasi evoluzione. Come detto, si ipotizza che a partire dall'istante dell'incidente  $t_a = t_0$ , la capacità vari in modo discontinuo, in istanti successivi  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_L$ , nei quali assume i valori  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_L$ , non necessariamente ciascuno maggiore del precedente e non escludendo valori nulli.

Il numero totale di veicoli  $M_i^2$  che sono transitati dall'istante  $\tau_0$  all'istante  $\tau_i$  è calcolabile tramite la relazione ricorsiva

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_0 &= M_0 + c_i(\tau_i - \tau_1) \\ M_i &= M_{i-1} + c_i(\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &\dots = \dots \\ M_{L-1} &+ M_{L-2} + c_{L-1}(\tau_L - \tau_{L-1}) \end{aligned}$$

La formula (18) può quindi essere generalizzata nel modo seguente:

$$N_p(t) = \max [M_{i-1} (t \geq \tau_i)] \quad (22)$$

Le formule (19), (20) e (21) possono essere scritte nell'identico modo, sostituendo unicamente  $N_p$  con  $N_p(t)$  e  $\tau_q$  con  $\tau_p$  che corrisponde al  $\tau_i$  della (22).

Si riscrive esplicitamente la formula del modello base:

$$T_{1a} = \tau_p + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_a) - N_p(t)}{c_q} - t_1 \quad (23)$$

### 5.4. Esempio numerico dell'apertura in due fasi

Nella fig. 2 è riportato un esempio corrispondente al caso di un'apertura in due fasi. Le unità di misura non sono esplicitate e si suppone unicamente che siano coerenti tra loro. Non sono riportate le progressive delle sezioni perché non rilevanti.

(2) Nella descrizione di questo modello si è utilizzato il simbolo  $M$  anziché  $N$  per evitare un conflitto di notazione con la funzione  $N_1(t)$ .

way, in subsequent time instants  $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L$ , in which it takes the values  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_L$ , not necessarily each one greater than the previous one and not excluding zero values.

The total number of vehicles  $M_i$  that have passed from the instant  $\tau_0$  to the instant  $\tau_i$  can be calculated using the recursive relation

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_0 &= M_0 + c_i(\tau_i - \tau_1) \\ M_i &= M_{i-1} + c_i(\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &\dots = \dots \\ M_{L-1} &+ M_{L-2} + c_{L-1}(\tau_L - \tau_{L-1}) \end{aligned}$$

The formula (18) can then be generalised as follows:

$$N_p(t) = \max [M_{i-1} (t \geq \tau_i)] \quad (22)$$

The formulas (19), (20) and (21) can be written in the same way, substituting only  $N_p$  with  $N_p(t)$  and  $\tau_q$  with  $\tau_p$  that corresponds to  $\tau_i$  of (22).

The formula of the base model is explicitly rewritten:

$$T_{1a} = \tau_p + \frac{N_{1a0} + q_1(t_1 - \tau_a) - N_p(t)}{c_q} - t_1 \quad (23)$$

### 5.4. Numeric example of two-phase opening

Fig. 2 shows an example that corresponds to the case of an opening in two phases. The units of measurement are not explicitated and it is assumed only that they are consistent with each other. The section points are not shown because they are not relevant.

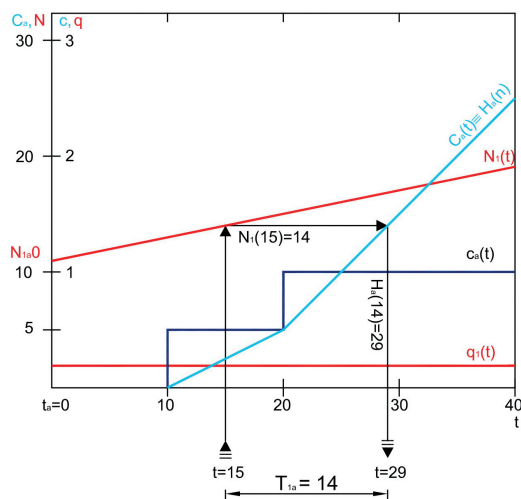


Fig. 2 - Esempio di interruzione totale ed aperture in due fasi.  
Fig. 2 - Example of total interruption and openings in two phases.



Le funzioni numeriche che descrivono il fenomeno vengono descritte qui di seguito.

La portata al momento dell'anomalia è

$$q_p(t) = 0,2t$$

La capacità, supponendo l'intervento risolutivo all'istante 20, corrispondente al passaggio da una corsia a due corsie sarà

$$c_a(t) = 0,5 (10 < t \leq 20) + 1 (t > 20)^3$$

Il numero di veicoli presenti nella tratta all'istante dell'anomalia si suppone sia:

$$N_{1a0} = 11$$

Ne risultano le seguenti funzioni derivate:

- il numero di veicoli interessati dall'anomalia che sono entrati nel sistema prima del tempo  $t$ :

$$N_1(t) = 11 + 0,2t$$

- Il numero di veicoli che a partire dall'istante di inizio dell'anomalia sono usciti dal sistema:

$$C_a(t) = 0,5 (t - 10)(10 < t \leq 20) + [5 + 1(t - 20)](t > 20)$$

- L'istante di uscita dal sistema del veicolo  $n$

$$H_a(n) = [(10 + 2n) (n \leq 5)] + [[20 + 1(n - 5)](n > 5)]$$

Di conseguenza, volendo ad esempio conoscere  $T_{1a}$  (15), ossia il tempo di percorrenza della tratta  $(x_1, x_a)$  per il veicolo che vi entra all'istante  $t_1 = 15$ , si effettuano i seguenti calcoli in sequenza:

Conoscendo l'istante di ingresso del veicolo nel sistema si ricava il numero di veicoli precedenti ad esso e interessati dall'anomalia

$$N_1(15) = 14$$

da questo si ottiene l'istante di uscita dalla sezione interessata dall'anomalia

$$H_a(14) = 29$$

da cui banalmente si ricava il tempo di percorrenza del veicolo entrato all'istante 15

$$T_{1a}(15) = H_a(14) - t_1 = 29 - 15 = 14$$

Nella fig. 2 è evidenziata l'evoluzione dei calcoli tramite il percorso indicato dalla spezzata che parte da  $t = 15$ .

<sup>(3)</sup> Nelle formule si è adottata la convenzione che le condizioni logiche riportate tra parentesi valgano 1 nel caso siano rispettate e 0 altrimenti.

The numeric functions that describe the phenomenon are described below.

The flow rate at the time of the anomaly is

$$q_p(t) = 0,2t$$

The capacity, assuming the decisive intervention at time instant 20, corresponding to the transit from a one-lane carriageway to a two-lane carriageway will be

$$c_a(t) = 0,5 (10 < t \leq 20) + 1 (t > 20)$$

The number of vehicles present in the stretch at the time instant of the anomaly is assumed to be:

$$N_{1a0} = 11$$

The following derived functions are obtained:

- the number of vehicles affected by the anomaly that have entered the system ahead of time  $t$ :

$$N_1(t) = 11 + 0,2t$$

- the number of vehicles that starting from the time instant of the beginning of the anomaly have exited the system:

$$C_a(t) = 0,5 (t - 10)(10 < t \leq 20) + [5 + 1(t - 20)](t > 20)$$

- the instant of exiting of vehicle  $n$  from the system

$$H_a(n) = [(10 + 2n) (n \leq 5)] + [[20 + 1(n - 5)](n > 5)]$$

As a result, for example, wanting to know  $T_{1a}$  (15), i.e. the running time of the stretch  $(x_1, x_a)$  for the vehicle which enters it at the time instant  $t_1 = 15$ , the following calculations are performed in sequence:

Knowing the vehicle entry instant into the system the number of vehicles prior to it and affected by the anomaly can be derived

$$N_1(15) = 14$$

from this, the instant of exiting the section affected by the anomaly can be derived

$$H_a(14) = 29$$

from which the running time of the vehicle entered at time instant 15 can be derived

$$T_{1a}(15) = H_a(14) - t_1 = 29 - 15 = 14$$

Fig. 2 shows the evolution of the calculations through the path indicated by the broken line that starts from  $t = 15$ .

## BIBLIOGRAFIA – REFERENCES

- [1] NAM D.H., DREW D.R. (1996), "Traffic dynamics: Method for estimating freeway travel times in real time from flow measurement", Journal of Transportation Engineering, pp. 185-191.
- [2] LI Y., McDONALD M. (2002), "Link travel time estimation using single gps equipped probe vehicle", in The IEEE V<sup>o</sup> International Conference on Intelligent Transportation Systems, pp. 932-937. ITSC.

- [3] COIFMAN B. (2002), "Estimating travel times and vehicle trajectories on free-ways using dual loop detectors", Transportation Research Part A, 36, 351-364.
- [4] CHUNG K., RUDJANAKANOKNAD J., CASSIDY M.J. (2007), "Relation between traffic density and capacity drop at three freeway bottlenecks", Transportation Research Part B, 41, 82-95.
- [5] LIGHTHILL M., WHITHAM G. (1955), "On kinematic waves ii: A theory of traffic flow on long crowded roads", in Proceeding Royal Society London, volume 229, Part A, pp. 317-345.
- [6] NEWELL G. (1993), "A simplified theory of kinematic waves in highway traffic part ii: Queueing at freeway bottlenecks", Transportation Research Part B, 27, 289-303.
- [7] DAGANZO C. (1997), "Fundamentals of Transportation and Traffic Operations", Elsevier, New York.
- [8] PAYNE H.J. (1979), "Freflo: A macroscopic simulation model of freeway traffic", Transportation Research Record, 722, 68-77.
- [9] KOTSIALOS A., PAPAGEORGIOU M., DIAKAKI C., PAVLIS Y., MIDDELHAM F. (2002), "Traffic flow modeling of large-scale motorway networks using the macroscopic modeling tool metanet", IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 3(4), 282-292.
- [10] PAPAGEORGIOU M., KOTSIALOS A. (2002), "Freeway ramp metering: an overview", IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 3(4), 271-281.
- [11] PAPAGEORGIOU M., KOSMATOPOULOS E., PAPAMICHAIL I. (2008), "Effects of variable speed limits on motorway traffic flow", Transportation Research Record, (2047), 37-48.

---

#### Sommaire

##### LE MODÈLE "CLESSIDRA"

Quand il se vérifie une anomalie de la circulation autoroutière avec une réduction drastique de la capacité, il est fréquent la formation immédiate d'une queue. Cet article illustre une méthodologie généralisée pour l'estimation du temps nécessaire à parcourir une distance à l'intérieure de laquelle se soit vérifié une anomalie (totale ou partielle) avec création de la queue et avec des différentes possibles évolutions temporelles du désencombrement de la section. La méthode est applicable à des situations réelles dans une infrastructure autoroutière avec le but primaire de fournir une information correcte aux utilisateurs par moyen d'un panneau à message variable et positionné dans une section avant le début de l'anomalie. La méthodologie a déjà été mise à point dans le contexte d'une convention de recherche souscrite entre la société "Autostrade per l'Italia SpA" e le Département d'Ingénierie Civile et de l'environnement de l'Université de Florence.

#### Zusammenfassung

##### DAS MODELL "SANDUHR"

Eine Autobahnverkehrsstörung ruft fast immer eine rasche Abnahme der Verkehrsleistung hervor und damit die Entstehung einer Warteschlange. Es wird hier eine allgemeine Methode vorgestellt, die die Schätzung der notwendigen Laufzeit des Autobahnabschnittes ermöglicht. Es werden verschiedene Gestaltungen der Störungsentwicklung in Kauf genommen und die konsequenten Zeiten der Freibelegung des Autobahnabschnittes berechnet. Die Methode ist zweckmäßig um rechtzeitigen Ankünften den Autobahnkunden zu erteilen, mittels stromaufwärtigen Leuchttafeln. Die Forschung wurde in der Universität Florenz bearbeitet und von der Gesellschaft "Autostrade" finanziert.