



Le prove di carico nel collaudo dei solai. Considerazioni teoriche e proposte operative

Loud test on floors. Theoretical considerations and operational proposals

Dott. Ingg. Giovanni Mario CAVALLERO^(), Nicola MORDÀ^(**), Prof. Ing. Giorgio Nicola SINISCALCO^(***)*

Sommario - Il contributo propone la descrizione di una procedura da applicare nelle prove di carico per il collaudo di strutture orizzontali, mediante l'ausilio di un'esposizione teorica per la determinazione dei coefficienti di vincolo sulla struttura reale, sia per carichi di prova distribuiti sia per carichi concentrati.

Vengono inoltre presentati alcuni esempi pratici con funzione esplicativa per varie casistiche.

1. Premesse e principi teorici

Nei collaudi dei solai di edifici ed in strutture orizzontali in genere, quali solettoni, anche misti, si presenta la necessità di determinare alcuni parametri della struttura realizzata, quasi sempre incerti e, tuttavia, fondamentali per il confronto fra freccia di prova e freccia teorica della struttura in opera, quest'ultima spesso determinata in misura non propriamente conforme a quella ipotizzata in progetto.

La valutazione di tali parametri non può essere affidata ad interpretazioni o ad ipotesi semplificative, posto che ciò non consentirebbe un valido confronto, generando una sorta di indeterminazione nella stima della reale collaudabilità della costruzione.

In particolare, le frecce della struttura sotto carico sono influenzate dalle coppie di vincolo alle estremità dell'elemento caricato, imposte in fase di calcolo ma, come accennato, incerte nel corso dell'effettivo svolgimento dell'opera.

Si rende, quindi, indispensabile determinare, con sufficiente approssimazione, il valore delle frecce, al fine di consentirne il divisato confronto. Prendendo spunto e sviluppando una proposta formulata negli anni '80 dal Prof. G. MORELLI sarà dato corso ad un'esposizione teorica generale riportando alcuni casi di prove di carico, adottate *more solito* con la presentazione dei coefficienti correttivi preventivamente calcolati, i quali si mostrano necessari per la determinazione della freccia teorica da

Summary - The contribution proposes the description of a procedure to be applied in Load tests for the testing of horizontal structures, through the aid of a theoretical presentation for the determination of the constraint coefficients on the actual structure, both for distributed test loads and for concentrated loads.

Some practical examples for the various cases are also presented with explanatory function.

1. Theoretical principles and premises

In tests on building floors and on horizontal structures in general, such as slabs, even mixed ones, there is a need to determine some parameters of the built structure, that are almost always uncertain and, nevertheless, essential for the comparison between test deflection and theoretical deflection of the structure in-site, the latter often determined to an extent that is not properly conform to that proposed in the project.

The evaluation of these parameters cannot be entrusted to interpretations or simplified hypothesis, given that this would not allow a valid comparison, creating a sort of indetermination in the real estimate of testability of the construction.

In particular, the deflections of the structure under load are influenced by the constraint torques at the ends of the loaded element, imposed during calculation but, as mentioned, uncertain during the actual execution of the work.

It is therefore necessary to determine, with sufficient accuracy, the value of the deflections, in order to allow the art minded comparison. Taking the cue from and developing a proposal made in the '80s by Prof. G. MORELLI, a general theoretical presentation will be given with some cases of load tests, taken more generally with the presentation of corrective coefficients calculated beforehand, which are necessary for the determination of the theoretical deflection to compare with actu-

^(*) Italferr - Torino.

^(**) DoMo Studio - Torino.

^(***) SLME.TE Srl - Torino.

^(*) Italferr - Turin.

^(**) DoMo Studio - Turin.

^(***) SLME.TE Srl - Turin.

confrontare con quelle effettive riscontrate, in fase di carico, nel corso delle prove di collaudo. È bene sottolineare che tali coefficienti, per assumere rilevanza, richiedono un alto numero di decimali, poiché spesso presentano valori molto esigui, che meritano di essere espressi con numeratore e denominatore in forma intera.

Com'è, inoltre, noto, nella generalità dei casi l'impronta del carico di prova non copre l'intero solaio, essendo caricata unicamente una striscia. Occorre, quindi, preventivamente valutare l'effetto di collaborazione esercitato dalle zone di solaio adiacenti alla striscia caricata, e determinare il coefficiente K_f di riduzione del carico di prova sulla striscia di solaio sottoposta a carico. La determinazione di K_f verrà successivamente presentata.

La larghezza di tale striscia b , pur non essendo strettamente vincolante, deve rispettare il rapporto suggerito da Pereswiet – Soltan [1]:

$$n = \frac{b}{\ell} = \frac{\text{larghezza del carico}}{\text{luce di campata}} > 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2 + \frac{q}{p_2}}} \quad (1)$$

dove: $q = K_f p$ rappresenta il carico ridotto dovuto alla ripartizione trasversale e p_2 = peso del carico esistente sulla struttura al momento della prova ciò vale anche per carichi concentrati.

Il metodo di collaudo che viene presentato può essere utilizzato anche per solai pieni, o strutture orizzontali composte da travi affiancate collegate con soletta.

Pur tuttavia, è necessario che l'elemento da collaudare disponga di una morfologia strutturale definita, con materiali omogenei e sufficientemente definiti nel loro sviluppo. Ciò postula che siano uniformi e costanti, per l'intera lunghezza, sia il modulo elastico E sia il momento d'inerzia J . Se così non fosse, come si verifica nel caso di sezioni di spessore variabile, il calcolo risulterebbe notevolmente più complesso; nella doppia integrazione dell'equazione

base della deformata $\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}$ si dovrebbe, infatti, con-

siderare la variabilità del denominatore lungo l'asse x , oltre a quella normale del momento flettente causato dal carico di prova e dalle coppie d'incastro.

Deve, inoltre, notarsi che il metodo condurrebbe a risultati inattendibili ove gli elementi della struttura fossero ragguardevolmente variabili, come si verifica per i solai composti da vecchie travi in legno spesso, fessurate longitudinalmente, collegate con travi secondarie ed assito superiore, affiancato e collegato (foto 1 e 2), o per i solai di cui sia dubbia e/o non accertabile la consistenza.

In queste ultime ipotesi, risulta particolarmente efficace ed attendibile l'applicazione della normativa americana ACI 318-08 [2], la quale, in estrema sintesi, propone di capovolgere la metodologia di approccio al problema; essa, infatti, introduce criteri concettualmente simili a quelli praticati nei collaudi di mezzi meccanici: ossia, ri-

al ones found, during load, during inspection tests. It is good to emphasise that these coefficients, to assume importance, require a high number of decimals, because they often have very small values, that deserve to be expressed with the numerator and denominator in integer form.

As is also known, in most cases, the imprint of the test load does not cover the entire floor, since only a strip is loaded. It is therefore necessary to preemptively assess the collaboration effect exerted by the floor areas adjacent to the strip loaded, and determine the K_f reduction coefficient of the test load on the floor strip subjected to load. The determination of K_f will be subsequently presented.

The width b of such strip, although not strictly binding, must respect the ratio suggested by Pereswiet – Soltan [1]:

$$n = \frac{b}{\ell} = \frac{\text{load strip width}}{\text{span}} > 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2 + \frac{q}{p_2}}} \quad (1)$$

where: $q = K_f p$ represents the reduced load due to transverse distribution and p_2 = the weight of the existing load on the structure at the time of the test; this also applies to concentrated loads.

The test method presented can also be used for solid floors, or horizontal structures composed of side-by-side beams linked with a slab.

Nevertheless, it is necessary that the item to be tested has a defined structural morphology, with homogeneous and sufficiently defined materials in their development. This postulates that both the elastic module E and the moment of inertia J are uniform and constant for the entire length. If it were not so, as occurs in the case of sections of varying thickness, the calculation would be considerably more complex; in the double integration of the

basic equation of $\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}$ the deformed one should

indeed consider the variability of the denominator along the x -axis, in addition to the normal bending moment caused by the test load and the fixing torques.

It must also be noted that the method would lead to unreliable results where elements of the structure were to be remarkably variable, as occurs for floors made of old thick wooden beams, creviced longitudinally, linked with secondary beams and upper planking, flanked and connected (photo 1e 2), or for floors of which consistency is dubious and/or non-identifiable.

In the latter assumptions, the application of the ACI 318-08 [2] American legislation is particularly effective and reliable that, in a nutshell, seeks to overturn the approach methodology to the problem; it in fact introduces criteria conceptually similar to those used in the testing of mechanical equipment: that is, it rejects the analysis of

Foto 1 - Solaio in legno misto. *Mixed wood floor.*Foto 2 - Trave in legno fessurata longitudinalmente. *Wooden beam creviced longitudinally.*

fiuta l'analisi di singoli componenti e impone una severa prova d'uso del mezzo. Con riguardo a queste tipologie di solaio, non è, pertanto, opportuno indulgere ad una minuta indagine della struttura sceverando le singole componenti che la formano, bene essendo, al contrario, sottoporla ai carichi che si intendono impiegare per il collaudo, opportunamente moltiplicati per un coefficiente, suddiviso, in genere, in quattro step successivi coefficiente che è a discrezione del collaudatore.

Se la freccia risulta nei limiti definiti dalla normativa, funzione dello spessore del solaio e della sua luce ed il ritorno è sufficientemente elastico, il collaudo risulta valido.

2. Inquadramento generale del metodo sotto il profilo teorico

Mediante il metodo proposto, nei collaudi statici la determinazione dei valori dei momenti di incastro viene dedotta dalle misure degli spostamenti effettuati in sito ed è, quindi, fondata su uno schema teorico di trave elastica, alla Bernoulli, con incastri cedevoli, i quali sono simulati applicando alla trave le coppie m_1 ed m_2 , incognite a priori.

Per la determinazione delle coppie si ricorre, in generale, al seguente schema teorico.

Si consideri la trave riportata nella fig. 1, soggetta ad un carico generico $q = q(x)$ (carico di prova nel caso in esame), ed alle coppie di estremità m_1 ed m_2 (incognite).

Lo spostamento in una generica sezione j si esprime come:

$$\eta(x_j) = w_0(x_j) + w_1(x_j) + w_2(x_j); \quad (2)$$

dove:

$w_0(x)$ = spostamenti generati dal carico $q(x)$ sulla trave semplicemente appoggiata;

individual components and imposes a strict proof of use of the equipment. With regard to these types of floors, it is therefore not appropriate to distinguish, in a small survey of the structure, the individual components that make it up, conversely, it is good to subject it to the loads that one wants to use for testing, appropriately multiplied by a coefficient, generally divided into four subsequent steps, coefficient that is at the discretion of the inspector.

If the deflection is within the limits defined by legislation, function of thickness of the floor and its span, and the return is sufficiently elastic, the test is valid.

2. General classification of the method under the theoretical profile

Through the proposed method, in static testing, the determination of the values of the fixing moments is deduced from the displacements carried out on site and is therefore based on a Bernoulli theoretical scheme of elastic beam, with yielding fixings that are moreover simulated by applying the m_1 and m_2 unknown torques to the beam.

For the determination of the couples one generally resorts to the following theoretical scheme.

The beam shown in fig. 1 is to be considered, subjected to a generic load $q = q(x)$ (test load in this case), and to the end torques m_1 and m_2 (unknowns).

The displacement in a generic section j is expressed as:

$$\eta(x_j) = w_0(x_j) + w_1(x_j) + w_2(x_j); \quad (2)$$

where:

$w_0(x)$ = displacements generated by the load $q(x)$ on the simply beam supported;

$w_k(x)$ = spostamenti generati dalle coppie di estremità m_k ossia m_1, m_2 sulla trave semplicemente appoggiata.

In linea generale gli spostamenti precedenti si esprimono con:

$$w_0(x) = \frac{\alpha(x)q^*l^4}{(EJ)}; \quad (3)$$

dove q^* indica il carico equivalente, nel senso dei Lavori Virtuali⁽¹⁾, e ancora:

$$w_k(x) = \frac{\beta_k(x)m_k l}{(EJ)} \text{ con } k = 1, 2 \quad (4)$$

La freccia teorica in un generico punto si esprime con:

$$\eta(x_j) = \frac{1}{(EJ)} \left[\alpha(x_j)q^*l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j)m_k l \right] \quad (5)$$

Secondo lo schema di collaudo riportato ai punti successivi, si individuano, in genere, tre sezioni di lettura delle frecce: a $l/4$, $l/2$ e $3l/4$ (quarti della luce).

Si indicano con f_a, f_m, f_b le frecce lette nelle suddette sezioni; in base alla (5) si ha

$$f_j = \frac{1}{(EJ)_r} \left[\alpha(x_j)q^*l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j)m_k l \right] \text{ con } j = a, m, b \quad (6)$$

Si noti che nella (6) il fattore di rigidezza (EJ) è indicato col pedice "r" per chiarire che è riferito alle condi-

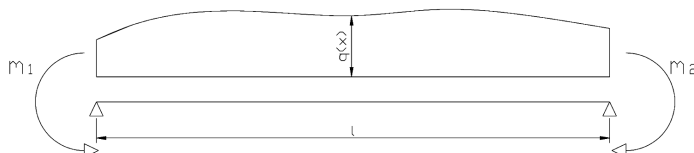


Fig. 1 - Schema statico della trave. Static beam pattern.

$w_k(x)$ = displacements generated by m_k end torques i.e. m_1, m_2 on the simply beam supported.

Generally, the previous displacements are expressed with:

$$w_0(x) = \frac{\alpha(x)q^*l^4}{(EJ)}; \quad (3)$$

where q^* is the equivalent load in the sense of Virtual Works⁽¹⁾ and still:

$$w_k(x) = \frac{\beta_k(x)m_k l}{(EJ)} \text{ with } k = 1, 2 \quad (4)$$

The theoretical deflection in a generic point is expressed by:

$$\eta(x_j) = \frac{1}{(EJ)} \left[\alpha(x_j)q^*l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j)m_k l \right] \quad (5)$$

According to the test diagram in the following paragraphs, three deflection reading sections are typically identified: a $l/4$, $l/2$ and $3l/4$ (quarters of spans).

The deflections read in these sections are indicated with f_a, f_m, f_b ; according to (5) we have

⁽¹⁾ Considerata una trave in semplice appoggio con un carico distribuito con legge generica $q=q(x)$ (fig.1) e si indica con $M_0 = M_0(x)$ il diagramma dei momenti corrispondente (si trascura il contributo del taglio ma il discorso non perde generalità). Lo spostamento η in una sezione generica x è deducibile applicando il teorema dei lavori virtuali: applicato una forza di valore unitario, duale dello spostamento da ricercare, nella sezione in esame e detto $M_1 = M_1(x)$ il diagramma della sollecitazione interna corrispondente, lo spostamento risulta

$$w_0(x) = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(x)M_1(x)dx \quad (i)$$

Il diagramma dei momenti $M_0 = M_0(x)$ può porsi nella forma $M_0 = q_0 \mu_0(x)$ essendo q_0 un parametro che caratterizza il carico. Ad esempio nel caso di carico uniforme costante di valore q_u si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(x) = q_u \frac{\ell}{2} x - q_u \frac{x^2}{2} = q_u \frac{\ell^2}{2} \left[\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right] \\ \text{Ponendo} \\ q_0 = q_u \frac{\ell^2}{2} \\ \mu_0(x) = \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \\ M_0(x) = q_0 \cdot \mu_0(x) \end{array} \right.$$

Pertanto nell'equazione (i) si ha $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q_0 \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$ ponendo $q^* = \frac{q_0}{\alpha(x)} \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$ si ha $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q^* \alpha(x) \ell^4$ (3).

⁽¹⁾ A simply supported beam has been considered with a distributed load with generic law $q=q(x)$ (fig. 1) and the corresponding diagram of the moments is indicated with $M_0 = M_0(x)$ (the shearing contribution is neglected, but the discussion does not lose prevalence). Displacement η in a generic section x is derivable by applying the theorem of virtual works: having applied a force of unit value, dual of the displacement to be researched, in the section under consideration and said $M_1 = M_1(x)$ the diagram of the corresponding internal stress, the displacement is

$$w_0(x) = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(x)M_1(x)dx \quad (i)$$

The moments diagram $M_0 = M_0(x)$ can be in the form $M_0 = q_0 \mu_0(x)$ being it a q_0 parameter that characterizes the load. For example, in the case of uniform load constant value q_u we have

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(x) = q_u \frac{\ell}{2} x - q_u \frac{x^2}{2} = q_u \frac{\ell^2}{2} \left[\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2} \right] \\ \text{Assuming} \\ q_0 = q_u \frac{\ell^2}{2} \\ \mu_0(x) = \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \\ M_0(x) = q_0 \cdot \mu_0(x) \end{array} \right.$$

Therefore in the equation (i) we have $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q_0 \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$ assuming $q^* = \frac{q_0}{\alpha(x)} \int_0^l \mu_0(x)M_1(x)dx$ we have $w_0(x) = \frac{1}{EJ} q^* \alpha(x) \ell^4$ (3).

zione della struttura in sito, il cui valore reale resta incognito. Di esso può formularsi una stima teorica in base al momento d'inerzia J ed al valore presunto o determinato *in situ* sulla struttura reale per il modulo elastico E ; il valore teorico si indica con $(EJ)_r$.

La (6) può essere scritta per il punto (a) ad $\frac{1}{4}$ della luce $\frac{(EJ)_r}{\ell} f_a = C_a + B_{1a} m_1 + B_{2a} m_2$ dove con riferimento alla (2) C_a è la w_0 in (a) dovuta al carico, $B_{1a} m_1$ è lo spostamento w_1 in (a) dovuto alla coppia m_1 e $B_{2a} m_2$ è lo spostamento w_2 in (a) dovuto alla coppia m_2 all'altra estremità della struttura caricata, e semplicemente appoggiata. Similmente si ha per f_m in mezzzeria f_b a $3/4$ della luce.

Si calcolano i rapporti:

$$R_j = \frac{f_j}{f_m} \quad \text{con } j = a, b \quad (7)$$

Tali valori sono noti direttamente dalle frecce misurate in sito e sono indipendenti dal fattore $(EJ)_r$.

Utilizzando la (6), dove m_k rappresenta unicamente le due coppie di estremità, con rapidi passaggi la (7), esplicitata per le frecce ai quarti della luce della trave, conduce alle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{C_a + B_{1a} m_1 + B_{2a} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{2m} m_2} &= \frac{f_a}{f_m} \\ \frac{C_b + B_{2b} m_1 + B_{1b} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{2m} m_2} &= \frac{f_b}{f_m} \end{aligned} \quad (8)$$

La (8) conduce ad un sistema di due equazioni nelle incognite $\{m_1, m_2\}$ che dipende solo dalla posizione dei carichi e dalle frecce misurate. Non è presente alcun valore riferito alla rigidità della struttura (E o J).

La deduzione dei momenti di estremità consente quindi, riapplicando la (5) con il valore teorico di (EJ) , di valutare la freccia attesa in mezzzeria f_r , da confrontare con la freccia misurata f_m , quindi, di esprimere un giudizio sull'esito della prova.

Lo schema appena esposto si applica indipendentemente dalla tipologia dei carichi usati per la prova.

Nei successivi paragrafi, a titolo esemplificativo, si applica la procedura indicata in termini concettuali, per la deduzione in forma chiusa di alcune formule relative a situazioni ricorrenti nelle procedure di collaudo.

Lo schema generale resta valido, come riferimento, per l'applicazione in casi differenti da quelli riportati.

Con riferimento alla fig. 2 si presenta la ripartizione trasversale tipica.

Il carico di prova p è solitamente distribuito su una "impronta" di solaio limitata. Ciò avviene in vari modi: caricando una striscia di larghezza b sull'intera lunghezza del solaio o per una lunghezza più limitata o utilizzando carichi concentrati.

$$f_j = \frac{1}{(EJ)_r} \left[\alpha(x_j) q^* l^4 + \sum_{k=1}^2 \beta_k(x_j) m_k l \right] \quad \text{with } j = a, m, b \quad (6)$$

It should be noticed that in (6), the stiffness factor (EJ) is indicated with subscript "r" to clarify that it refers to the condition of the site structure, whose real value remains unknown. A theoretical estimate can be formulated based on moment of inertia J and the presumed value or fixed *in situ* on the actual structure for the elastic module E ; the theoretical value is indicated with $(EJ)_r$.

Formula (6) can be written for point (a) at $\frac{1}{4}$ of span $\frac{(EJ)_r}{\ell} f_a = C_a + B_{1a} m_1 + B_{2a} m_2$ where with reference to (2) C_a is w_0 in (a) due to the load, $B_{1a} m_1$ is the displacement w_1 in (a) due to the torque m_1 and $B_{2a} m_2$ is the displacement w_2 in (a) due to the torque m_2 at the other end of the loaded and simply supported structure. Similarly one has for f_m in the centreline f_b at $3/4$ of the span.

The ratios are calculated:

$$R_j = \frac{f_j}{f_m} \quad \text{with } j = a, b \quad (7)$$

These values are known directly from the deflections measured on site and are independent from factor $(EJ)_r$.

Using (6), where m_k represents only the two end torques, with quick steps (7), explicitated for the deflections in the quarters of the beam span, leads to the following formulas:

$$\begin{aligned} \frac{C_a + B_{1a} m_1 + B_{2a} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{2m} m_2} &= \frac{f_a}{f_m} \\ \frac{C_b + B_{2b} m_1 + B_{1b} m_2}{C_m + B_{1m} m_1 + B_{2m} m_2} &= \frac{f_b}{f_m} \end{aligned} \quad (8)$$

Formula (8) leads to a system of two equations in unknowns $\{m_1, m_2\}$ that depends only on the position of the loads and on the measured deflections. There is no value referred to the stiffness of structure (E or J).

The deduction of the end moments therefore allows, reapplying (5) with the theoretical value (EJ) , to evaluate the deflection expected at the centreline f_r to be compared with the measured deflection f_m , therefore, to express an opinion on the outcome of the test.

The pattern just described applies regardless of the type of loads used for testing.

In the next paragraphs, for example, the procedure defined in conceptual terms is applied, for the deduction in closed form of some formulas relating to recurring situations in testing procedures.

The general diagram remains valid as a reference for application in cases other than those listed.

With reference to fig. 2, the typical transverse distribution is shown.

Tali porzioni di solaio limitrofe collaborano a sostenere il carico agente sulla striscia di larghezza b caricata. Tale striscia di carico può considerarsi, quindi, soggetta ad un carico inferiore. Il coefficiente K_f di riduzione è definito da una legge ricavata dalle letture delle frecce in opportuni punti del solaio in una sezione trasversale.

Ponendo alcuni flessimetri su un lato del carico (fig. 2), con un solaio simmetrico dal lato opposto si ha:

$$A = (f_1 + f_2)a_1 + (f_2 + f_3)a_2 + (f_3 + f_m)a_3;$$

$$q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = K_f p$$

dove: K_f risulta minore dell'unità.

Il carico q da considerare per la verifica della striscia di solaio larga b è quindi inferiore al carico p posto in opera.

Un'ulteriore, fondamentale, condizione risiede nella necessità di acquisire conoscenza del grado di incastro che i vincoli esercitano agli estremi del solaio di prova. Spesso, infatti, il solaio sottoposto alla prova si trova in relazione di continuità con altri solai, senza, poi, dimenticare che le stesse travi di bordo esercitano un certo grado d'incastro, ipotizzato sì in fase di progetto, e tuttavia da accertare e definire in fase di avvenuta realizzazione e/o di collaudo.

È, quindi, essenziale acquisire conoscenza di m_1 e m_2 (fig. 3).

I quali influenzano le frecce effettive della struttura in essere e sono fondamentali per il calcolo della freccia teorica del solaio realizzato. Tali valori sono enucleabili con la lettura, durante la prova, della freccia in mezzera e a 1/4 della luce (fig. 2), entrambe depurate dagli eventuali cedimenti dei vincoli.

Posti $m_1 = a_1 \ell^2 q$, ed $m_2 = a_2 \ell^2 q$, si determinano i coefficienti a_1 ed a_2 .

Vengono, di seguito, esposti tali coefficienti per alcuni casi fra i più comuni nel corso delle prove di collaudo.

Un aspetto merita di essere segnalato. Tutti i coefficienti di seguito riportati, rigorosamente esatti, in alcuni

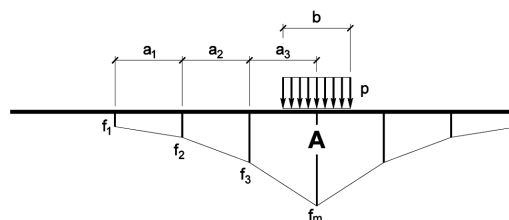


Fig. 2 - Schema di posa del carico di collaudo. Diagram of laying out of test load.

Test load p is usually distributed on a limited floor "imprint". This happens in several ways: by loading a strip of width b along the entire length of the floor or along a more limited length or using concentrated loads.

These portions of the surrounding floor collaborate to support the load acting on the b -width strip loaded. This load strip can be considered and therefore subjected to a lower load. The K_f reduction coefficient is defined by a law derived from the readings of the deflections in appropriate points of the floor in a cross-section.

Putting some deflectometers on one side of the load (fig. 2), with a symmetrical floor on the opposite side, we have:

$$A = (f_1 + f_2)a_1 + (f_2 + f_3)a_2 + (f_3 + f_m)a_3;$$

$$q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = K_f p$$

where: K_f is equal to less than the unit.

The q load to consider for testing of the floor strip of width b is therefore less than load p in site.

Another fundamental condition lies in the need to acquire knowledge of the fixing degree that the constraints exercise at the extremities of the test floor. In fact, often, the floor subjected to the test is in continuity relation with other floors, without forgetting that the same edge beams exercise a certain fixing degree, assumed in the design phase, and yet to ascertain and define during the construction and/or testing phase.

It is, therefore, essential to acquire knowledge of m_1 and m_2 (fig. 3).

Which affect the actual deflections of the existing structure and are essential for the calculation of the theoretical deflection of the floor created. These values can be explained by reading the deflection at the centreline and at 1/4 of the span (fig. 2), during the test, both reduced of any constraint yielding.

Given $m_1 = a_1 \ell^2 q$, ed $m_2 = a_2 \ell^2 q$, the coefficients a_1 and a_2 are determined.

These coefficients for some cases, among the more common ones during the trial tests, are reported below.

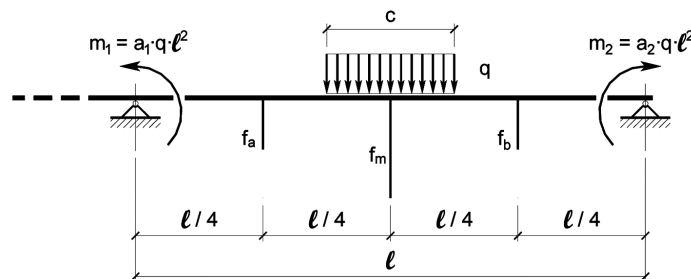


Fig. 3 - Schema di calcolo. Calculation scheme.

casi possono essere affetti da instabilità numerica per errori di arrotondamento decimale, inevitabili in generale nell'ambito dei calcoli numerici, ed ancor più nel caso di calcoli svolti con procedura manuale. I casi in cui tale fenomeno si riscontra è quello di strutture molto rigide che esibiscono spostamenti molto piccoli. Brevemente: se si ha 0.0666..... e più opportuno trattarlo come $\frac{2}{30}$.

3. Casi con carichi concentrati

In taluni collaudi per determinare il carico di collaudo è conveniente fare uso di carichi concentrati, quali martinetti idraulici opportunamente contrastati o autocarri i cui assali anteriori e posteriori realizzano sollecitazioni assimilabili a carichi concentrati sulla sottostante struttura da collaudare.

Le combinazioni di posizionamento dei carichi possono essere molteplici: sia per il numero degli stessi, sia in funzione della loro disposizione.

Come presentato in precedenza, attraverso la lettura delle frecce f_a , f_m ed f_b , ai quarti della luce, ottenute dalla prova di carico è possibile calcolare i coefficienti a_1 ed a_2 idonei a consentire il calcolo dei momenti reali di continuità alle estremità della campata sottocarico di prova, valori indipendenti dalle ipotesi teoriche di progetto.

3.1. Carico concentrato singolo

Di seguito si espone il processo per un carico singolo.

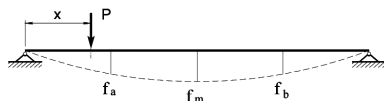
Sulla trave semplicemente appoggiata gli spostamenti ai quarti sono:

$$\begin{cases} f_{a0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} A \\ f_{m0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} B \\ f_{b0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} C \end{cases} \quad (9)$$

Ponendo $\xi = \frac{x}{\ell}$ si ha:

- per il carico nel 1° quarto (1° caso)

$$A = (21\xi - 48\xi^3) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \quad C = (15\xi - 16\xi^3)$$



- per il carico nel 2° quarto (2° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \\ C = (15\xi - 16\xi^3)$$

There is an aspect that is worth reporting. All rigorously accurate coefficients below, may in some cases be suffering from numerical instability for decimal rounding errors, generally unavoidable in the context of numerical calculations, and even more so in the case of calculations performed manually. Cases in which this phenomenon occurs, are related to very stiff structures that show very small displacements. Briefly: if one has 0.0666..... it is more appropriate to treat it as $\frac{2}{30}$.

3. Cases with concentrated loads

In certain tests, in order to determine the testing load, it is convenient to make use of concentrated loads, such as properly contrasted hydraulic jacks or trucks whose front and rear axles generate solicitations similar to concentrated loads on the underlying structure to be tested.

The placement combination of loads can be a variety: both for the number of the same and depending on their arrangement.

As previously presented, through the reading of the f_a , f_b and f_m deflections, at quarters of span, produced by the load test, one can calculate coefficients a_1 and a_2 suitable to allow the calculation of real moments of continuity at the ends of the test span under load, values that are independent from the theoretical project assumptions.

3.1. Single concentrated load

The process for a single load is explained below.

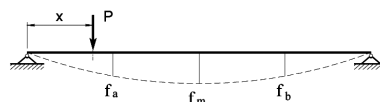
On the simply supported beam the displacements at quarters of span are:

$$\begin{cases} f_{a0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} A \\ f_{m0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} B \\ f_{b0} = \frac{P\ell^3}{384EJ} C \end{cases} \quad (9)$$

Given $\xi = \frac{x}{\ell}$ we have:

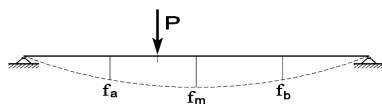
- for the load in 1st quarter (1st case)

$$A = (21\xi - 48\xi^3) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \quad C = (15\xi - 16\xi^3)$$



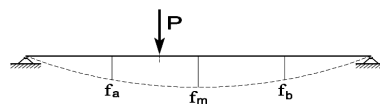
- for the load in 2nd quarter (2nd case)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (24\xi - 32\xi^3) \\ C = (15\xi - 16\xi^3)$$



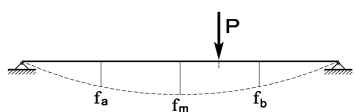
– per il carico nel 3° quarto (3° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \\ C = (15\xi - 16\xi^3)$$



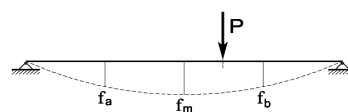
– for the load in 3rd quarter (3rd case)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \\ C = (15\xi - 16\xi^3)$$



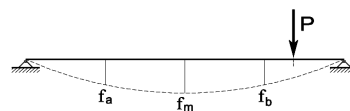
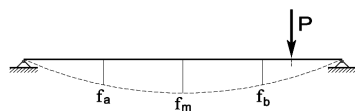
– per il carico nel 4° quarto (4° caso)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \\ C = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27)$$



– for the load in 4th quarter (4th case)

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \\ C = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27)$$



Ponendo $H = \frac{384EJ}{P\ell^3}$ (10)

Given $H = \frac{384EJ}{P\ell^3}$ (10)

le (9) divengono
$$\begin{cases} Hf_{a0} = A \\ Hf_{m0} = B \\ Hf_{b0} = C \end{cases}$$

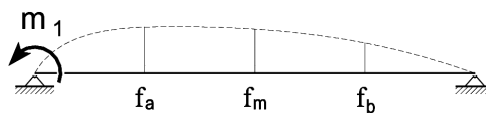
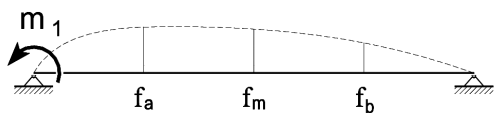
(9) becomes
$$\begin{cases} Hf_{a0} = A \\ Hf_{m0} = B \\ Hf_{b0} = C \end{cases}$$

Gli spostamenti generati dalle coppie d'incastro sono

Displacements generated by fixing torques are

$$\begin{cases} f_{a1} = \frac{21}{384EJ} m_1 \ell^2 \\ f_{m1} = \frac{24}{384} m_1 \ell^2 \\ f_{b1} = \frac{15}{384} m_1 \ell^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{a1} = \frac{21}{384EJ} m_1 \ell^2 \\ f_{m1} = \frac{24}{384} m_1 \ell^2 \\ f_{b1} = \frac{15}{384} m_1 \ell^2 \end{cases}$$



e reciprocamente per m_2 .

and mutually for m_2 .

$$f_{a2} = \frac{15}{384EJ} m_2 \ell^2 \\ f_{m2} = \frac{1}{16EJ} m_2 \ell^2 \\ f_{b2} = \frac{21}{384EJ} m_2 \ell^2$$

$$f_{a2} = \frac{15}{384EJ} m_2 \ell^2 \\ f_{m2} = \frac{1}{16EJ} m_2 \ell^2 \\ f_{b2} = \frac{21}{384EJ} m_2 \ell^2$$

Così gli spostamenti totali dovuti al carico ed alle coppie di bordo risultano

$$\begin{cases} f_a = \frac{P\ell^3}{384EJ}A - \frac{21}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{15}{384EJ}m_2\ell^2 \\ f_m = \frac{P\ell^3}{384EJ}B - \frac{24}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{24}{384EJ}m_2\ell^2 \\ f_b = \frac{P\ell^3}{384EJ}C - \frac{15}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{21}{384EJ}m_2\ell^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Sostituendo } m_1 = a_1P\ell \quad m_2 = a_2P\ell \quad (12)$$

Sostituendo i valori della (12) e della (10) la (11) diviene

$$\begin{cases} Hf_a = A - 21a_1 - 15a_2 \\ Hf_m = B - 24a_1 - 24a_2 \\ Hf_b = C - 15a_1 - 21a_2 \end{cases} \quad (13)$$

Impostando il sistema $\frac{f_a}{f_m}$ ed $\frac{f_b}{f_m}$ e poichè i valori di f_a, f_m, f_b sono le letture della prova di carico e sono quindi noti e calcolando i valori A, B, C , che dipendono dalla coordinata x della posizione del carico si determinano le due incognite a_1 ed a_2 che permettono di valutare i momenti di incastro con le (12).

Risolviendo il sistema si ha

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \\ a_2 = \frac{(7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \end{cases} \quad (14)$$

I valori dei momenti alle estremità valgono $m_1 = a_1P\ell$ $m_2 = a_2P\ell$.

Il momento flettente in mezzeria per i quattro casi vale:

$$- \text{ per il 1° e 2° caso } M_m = \frac{P\ell}{2}(\xi - a_1 - a_2)$$

$$- \text{ per il 3° e 4° caso } M_m = (1 - \xi - a_1 - a_2) \frac{P\ell}{2}$$

La freccia teorica in mezzeria vale:

- per il 1° e 2° caso

$$f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[\xi(3 - 4\xi^2) - 3(a_1 + a_2)] \quad (15)$$

oppure

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ}[P\ell B - 24(m_1 + m_2)] \quad (16)$$

- per il caso 3° e 4°

$$f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[(4\xi^3 - 12\xi^2 + 9\xi - 1) - 3(a_1 + a_2)]$$

oppure

So total displacements due to the load and to the edge torques are

$$\begin{cases} f_a = \frac{P\ell^3}{384EJ}A - \frac{21}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{15}{384EJ}m_2\ell^2 \\ f_m = \frac{P\ell^3}{384EJ}B - \frac{24}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{24}{384EJ}m_2\ell^2 \\ f_b = \frac{P\ell^3}{384EJ}C - \frac{15}{384EJ}m_1\ell^2 - \frac{21}{384EJ}m_2\ell^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{Replacing } m_1 = a_1P\ell \quad m_2 = a_2P\ell \quad (12)$$

Substituting the values of (12) and (10), (11) becomes

$$\begin{cases} Hf_a = A - 21a_1 - 15a_2 \\ Hf_m = B - 24a_1 - 24a_2 \\ Hf_b = C - 15a_1 - 21a_2 \end{cases} \quad (13)$$

Setting the system $\frac{f_a}{f_m}$ and $\frac{f_b}{f_m}$, as the values of f_a, f_m, f_b are the load test readings and are thus known, and calculating values A, B, C , dependent on the x coordinate of the load position, two unknowns a_1 and a_2 are determined that allow to evaluate the fixing moments with (12).

Solving the system we have

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \\ a_2 = \frac{(7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)} \end{cases} \quad (14)$$

The values of the moments at the ends are $m_1 = a_1P\ell$ $m_2 = a_2P\ell$.

The bending moment in the centreline for the four cases is:

$$- \text{ for the 1st and 2nd case } M_m = \frac{P\ell}{2}(\xi - a_1 - a_2)$$

$$- \text{ for the 3rd and 4th case } M_m = (1 - \xi - a_1 - a_2) \frac{P\ell}{2}$$

The theoretical centerline deflection is:

- for the 1st and 2nd case

$$f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[\xi(3 - 4\xi^2) - 3(a_1 + a_2)] \quad (15)$$

or

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ}[P\ell B - 24(m_1 + m_2)] \quad (16)$$

- for the 3rd and 4th case

$$f_t = \frac{P\ell^3}{48EJ}[(4\xi^3 - 12\xi^2 + 9\xi - 1) - 3(a_1 + a_2)]$$

or

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [P\ell B - 24(m_1 + m_2)]$$

con $B = (24\xi - 32\xi^3)$ nel 1° e 2° caso

con $B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8)$ nel 3° e 4° caso.

La freccia teorica così calcolata è confrontabile con la freccia effettiva f_m misurata con la prova.

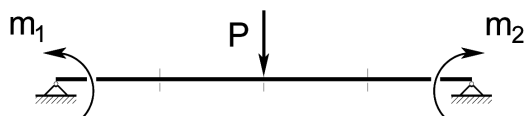
Uguagliando la (15) o la (16) con la freccia dovuta ad un carico distribuito q .

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5q\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (16^1)$$

si calcola con accettabile approssimazione il carico q distribuito su tutto il solaio equivalente al carico concentrato di prova

- per il 1° e 2° caso $q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell} (24\xi - 32\xi^3)$
- per il 3° e 4° caso $q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell} ((32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8))$

Per il caso più significativo di carico al centro si ha



$$x = \frac{\ell}{2} \quad \xi = 0.5$$

Si considera il carico nel 2° quarto.

$$B = (24\xi - 32\xi^3) = 8 \quad C = (15\xi - 16\xi^3) = 5.5$$

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) = 5.5$$

da cui dalle (14)

$$\begin{aligned} 7A - 5C &= 11; & (8C - 7B) &= -12; & (5B - 8A) &= 4 \\ 7C - 5A &= 11; & (5B - 8C) &= -4; & (8A - 7B) &= -12 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{11f_m - 12f_a - 4f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

$$a_2 = \frac{11f_m - 4f_a - 12f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

Il momento flettente in mezzera risulta

$$M_m = \frac{1}{4} P\ell (1 - 2a_1 - 2a_2)$$

La freccia in mezzera risulta

$$f_m = \frac{P\ell^3}{48EJ} [1 - 3a_1 - 3a_2]$$

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [P\ell B - 24(m_1 + m_2)]$$

with $B = (24\xi - 32\xi^3)$ in the 1st and 2nd case

with $B = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8)$ in 3rd and 4th case.

The theoretical deflection so calculated is comparable with the actual deflection f_m measured by the test.

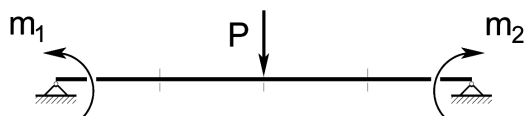
By equating (15) or (16) with the deflection due to a distributed load q .

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5q\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (16^1)$$

load q , distributed on all the floor and equal to the concentrated test load, is calculated with acceptable approximation

- for the 1st and 2nd case $q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell} (24\xi - 32\xi^3)$
- for the 3rd and 4th case $q = \frac{PB}{5\ell} = \frac{P}{5\ell} ((32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8))$

For the most significant load case at the centre we have



$$x = \frac{\ell}{2} \quad \xi = 0.5$$

The load in the 2nd quarter is considered.

$$B = (24\xi - 32\xi^3) = 8 \quad C = (15\xi - 16\xi^3) = 5.5$$

$$A = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) = 5.5$$

from which from (14)

$$\begin{aligned} 7A - 5C &= 11; & (8C - 7B) &= -12; & (5B - 8A) &= 4 \\ 7C - 5A &= 11; & (5B - 8C) &= -4; & (8A - 7B) &= -12 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{11f_m - 12f_a - 4f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

$$a_2 = \frac{11f_m - 4f_a - 12f_b}{48(1.5f_m - f_a - f_b)}$$

The bending moment at the midspan beam is

$$M_m = \frac{1}{4} P\ell (1 - 2a_1 - 2a_2)$$

The centreline deflection is

$$f_m = \frac{P\ell^3}{48EJ} [1 - 3a_1 - 3a_2]$$

Se i rapporti di $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.5$ si ha $a_1 = a_2 = 0.125$ ossia l'incastro perfetto.

Se i rapporti di $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.6875$ si ha $a_1 = a_2 = 0$ ossia l'appoggio semplice.

3.2. Carico con più forze agenti concentrate

Se più forze agiscono sulla trave, utilizzando il metodo precedente si constata come sostanzialmente il procedimento non cambia.

Così lo spostamento f_a è dato dalla somma degli spostamenti dovuti dalle singole forze. Nel caso per esempio di 4 forze $f_a = f_a^1 + f_a^2 + f_a^3 + f_a^4$

$$\begin{cases} f_a^1 = \frac{P_1 \ell^3}{384 EJ} A_1 - \frac{21}{384} P_1 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_1 a_2 \ell^3 \\ f_a^2 = \frac{P_2 \ell^3}{384 EJ} A_2 - \frac{21}{384} P_2 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_2 a_2 \ell^3 \\ f_a^3 = \frac{P_3 \ell^3}{384 EJ} A_3 - \frac{21}{384} P_3 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_3 a_2 \ell^3 \\ f_a^4 = \frac{P_4 \ell^3}{384 EJ} A_4 - \frac{21}{384} P_4 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_4 a_2 \ell^3 \end{cases} \quad (17)$$

Sostituendo: $P_2 = R_2 P_1$ $P_3 = R_3 P_1$ $P_4 = R_4 P_1$

ed $H = \frac{384 EJ}{P_1 \ell^3}$ la somma della (17) dà la f_a totale delle quattro forze $H f_a = A - 21 R a_1 - 15 R a_2$

$$A = A_1 + R_2 A_2 + R_3 A_3 + R_4 A_4$$

dove $R = 1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1}$

Analogamente per f_m ed f_b . Così si ha

$$\begin{cases} H f_a = A - 21 R a_1 - 15 R a_2 \\ H f_m = B - 24 R a_1 - 24 R a_2 \\ H f_b = C - 15 R a_1 - 21 R a_2 \end{cases} \quad (18)$$

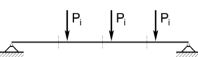
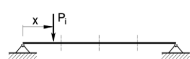
A_1 è il parametro dell'abbassamento f_a dovuto alla forza P_1

A_2 è il parametro dell'abbassamento f_a dovuto alla forza P_2

A_3 eccetera

In particolare se la forza generica P_i è nel 1° quarto $A_i = (21 \xi_i - 48 \xi_i^3)$

Se la forza generica è negli altri quarti della trave $A_i = (16 \xi_i^3 - 48 \xi_i^2 + 33 \xi_i - 1)$



* * *

If the ratios of $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.5$ we have $a_1 = a_2 = 0.125$ that is the fixed ends beam.

If the ratios $\frac{f_a}{f_m} = \frac{f_b}{f_m} = 0.6875$ of we have $a_1 = a_2 = 0$ that is simple supported beam.

3.2. Load with more concentrated forces

If multiple forces act on the beam, using the method above, one ascertains that the process does not change substantially.

This way the displacement f_a is given by the sum of displacements caused by individual forces. In the case, for example, of 4 forces $f_a = f_a^1 + f_a^2 + f_a^3 + f_a^4$

$$\begin{cases} f_a^1 = \frac{P_1 \ell^3}{384 EJ} A_1 - \frac{21}{384} P_1 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_1 a_2 \ell^3 \\ f_a^2 = \frac{P_2 \ell^3}{384 EJ} A_2 - \frac{21}{384} P_2 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_2 a_2 \ell^3 \\ f_a^3 = \frac{P_3 \ell^3}{384 EJ} A_3 - \frac{21}{384} P_3 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_3 a_2 \ell^3 \\ f_a^4 = \frac{P_4 \ell^3}{384 EJ} A_4 - \frac{21}{384} P_4 a_1 \ell^3 - \frac{15}{384} P_4 a_2 \ell^3 \end{cases} \quad (17)$$

Replacing: $P_2 = R_2 P_1$ $P_3 = R_3 P_1$ $P_4 = R_4 P_1$

and $H = \frac{384 EJ}{P_1 \ell^3}$ the sum of (17) gives the total f_a of the four forces $H f_a = A - 21 R a_1 - 15 R a_2$

$$A = A_1 + R_2 A_2 + R_3 A_3 + R_4 A_4$$

where $R = 1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1}$

Similarly for f_m and f_b . This way one has

$$\begin{cases} H f_a = A - 21 R a_1 - 15 R a_2 \\ H f_m = B - 24 R a_1 - 24 R a_2 \\ H f_b = C - 15 R a_1 - 21 R a_2 \end{cases} \quad (18)$$

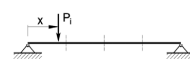
A_1 is the parameter of the deflection f_a due to force P_1

A_2 is the parameter of the deflection f_a due to force P_2

A_3 etc.

In particular, if the generic force P_i is in the 1st quarter $A_i = (21 \xi_i - 48 \xi_i^3)$

If the generic force is in the other quarters of the beam $A_i = (16 \xi_i^3 - 48 \xi_i^2 + 33 \xi_i - 1)$



* * *

$B = B_1 + B_2R_2 + B_3R_3 + B_4R_4 + \dots B_mR_m$ dove

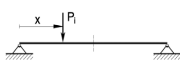
B_1 è il parametro dell'abbassamento f_m in mezzeria dovuto alla P_1

B_2 è il parametro dell'abbassamento f_m in mezzeria dovuto alla P_2

B_3 ecc.

In particolare:

- se la forza generica P_i è nella prima metà della trave si ha $B_i = (24\xi_i - 32\xi_i^3)$



- se la forza generica P_i è nella 2° metà della trave si ha $B_i = (32\xi_i^3 - 96\xi_i^2 + 72\xi_i - 8)$



* * *

$C = C_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + \dots C_nR_n$ dove

C_1 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_1

C_2 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_2

C_3 è il parametro dell'abbassamento f_b dovuto alla P_3

C_4 ecc.

In particolare:

- se la forza generica P_i è posizionata nei primi 3 quarti della trave si ha $C_i = (15\xi_i - 16\xi_i^3)$
- se la forza generica P_i è nell'ultimo quarto si ha $C_i = (48\xi_i^3 - 144\xi_i^2 + 123\xi_i - 27)$

* * *

- la (18) è sostanzialmente simile alla (13) la cui soluzione è quindi simile alla (14)

Calcolati A, B, C , ed R , con le letture degli abbassamenti di prova f_a, f_m, f_b , si calcolano a_1 ed a_2 . Essi valgono

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b \\ Ma_2 = (7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b \end{cases} \quad (19)$$

$$M = R(1.5f_m - f_a - f_b) \times 48$$

I momenti reali agli estremi sono

$$m_1 = a_1P_1\ell R \quad m_2 = a_2P_1\ell R \quad (20)$$

La freccia teorica in mezzeria vale

$$f_i = \frac{P_1\ell^3}{384EJ} [B - 24R(a_1 + a_2)] \quad (20^1)$$

4. Carico generico distribuito

Al capitolo 3, per i casi di carichi concentrati di collaudo su solai, sono stati calcolati i valori di a_1 e a_2 .

Tuttavia si ritiene necessario ed utile sviluppare il calcolo di tali coefficienti per carichi distribuiti qualsiasi sia nel loro numero sia nella loro posizione e valore anche variabile nel proprio intervallo di impronta.

$B = B_1 + B_2R_2 + B_3R_3 + B_4R_4 + \dots B_mR_m$ where

B_1 is the parameter of the deflection f_m at the centreline due to P_1

B_2 is the parameter of the deflection f_m at the centreline due to P_2

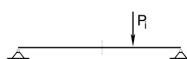
B_3 etc.

In particular:

- If the generic force P_i is in the first half of the beam we have $B_i = (24\xi_i - 32\xi_i^3)$



- If the generic force P_i is in the 2nd half of the beam we have $B_i = (32\xi_i^3 - 96\xi_i^2 + 72\xi_i - 8)$



* * *

$C = C_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + \dots C_nR_n$ where

C_1 is the parameter of the deflection f_b due to P_1

C_2 is the parameter of the deflection f_b due to P_2

C_3 is the parameter of the deflection f_b due to P_3

C_4 etc.

In particular:

- If the generic force P_i is in the first three quarters of the beam one has $C_i = (15\xi_i - 16\xi_i^3)$
- If the generic force P_i is in the last quarter one has $C_i = (48\xi_i^3 - 144\xi_i^2 + 123\xi_i - 27)$

* * *

- (18) is substantially similar to (13) whose solution is therefore similar to (14)

Having calculated A, B, C , and R , with readings of test deflections f_a, f_m, f_b , a_1 and a_2 are calculated. The values of these

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)f_m + (8C - 7B)f_a + (5B - 8A)f_b \\ Ma_2 = (7C - 5A)f_m + (5B - 8C)f_a + (8A - 7B)f_b \end{cases} \quad (19)$$

$$M = R(1.5f_m - f_a - f_b) \times 48$$

The real moments at the ends are

$$m_1 = a_1P_1\ell R \quad m_2 = a_2P_1\ell R \quad (20)$$

The theoretical midspan deflection value is

$$f_i = \frac{P_1\ell^3}{384EJ} [B - 24R(a_1 + a_2)] \quad (20^1)$$

4. Distributed generic load

In Chapter 3, for cases of testing concentrated loads on floors, the values of a_1 and a_2 have been calculated.

However, it is considered necessary and useful to develop the calculation of these coefficients for any distributed loads both in their number and in their position and value also variable in their imprint range.

Con riferimento all' "Inquadramento generale del metodo" (Capitolo 2) il problema del carico generico anche variabile distribuito parzialmente ed in zona qualsiasi sulla trave è risolvibile in via definitiva ed esatta sul modo seguente.

Con riferimento al paragrafo 3 (Carichi Concentrati) i coefficienti A-B-C sono più propriamente definibili quali funzioni di influenza dello spostamento dei punti di controllo (i quarti della luce) per i carichi agenti nelle varie posizioni, posizioni individuate dalle variabili ξ e ζ di cui $\zeta = 1 - \xi$.

Per qualsiasi condizione di carico, generico, il loro impiego diviene immediato con risultati esatti.

Così per la freccia f_a per la prima delle (9) per carico concentrato P su trave semplicemente appoggiata, risulta

$$f_{a0} = A(\xi) \frac{P}{K}$$

$$\text{con } K = \frac{384EJ}{\ell^3} \quad (21')$$

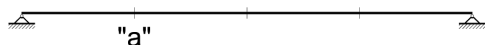
Considerando un carico generico $p = p(\xi)$ anche variabile, da ξ_1 a ξ_2 si ha $dP = p(\xi)d\xi$ da cui $df_{a0} = A(\xi)dP/K = (1/K) A(\xi)p(\xi)d\xi$.

La freccia si ottiene per integrazione sullo sviluppo della trave $f_{a0} = \frac{1}{K} \int_{\xi_1}^{\xi_2} A(\xi)p(\xi)d\xi$ (21).

Come già noto il coefficiente $A(\xi)$ assume due forme a seconda del tratto di integrazione:

- a. prima del punto di controllo ("a" in questo caso al 1° quarto della trave) si ha

$$A_1(\xi) = (21\xi - 48\xi^3) \quad (22)$$



- b. dopo il punto di controllo ossia per gli altri $\frac{3}{4}$ di trave si ha

$$A_2(\xi) = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad (23)$$

L'integrale (21) diviene

$$f_{a0} = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} A_1(\xi)p(\xi)d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} A_2(\xi)p(\xi)d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384EJ} = \alpha \frac{\ell^4 p}{384EJ} \quad (23')$$

dove ξ_1 e ξ_2 sono i limiti per il carico nel primo quarto e ξ_3 e ξ_4 sono i limiti per i carichi nei tre quarti successivi al punto "a". α è quindi un numero.

Con tale integrazione si possono dedurre tutte le formule relative ai carichi distribuiti anche variabili sia d'intensità che di posizione.

Analogamente si ottiene per f_{m0} ed f_{b0}

With reference to the "General framework of the method" (Chapter 2) the problem of the generic load also variable and partially distributed and in any area on the beam is definitively and accurately solved in the following way.

With reference to paragraph 3 (Concentrated Loads) coefficients A-B-C are more properly defined as influence functions of the displacement of the control points (the span quarters) for loads acting in various positions, positions identified by the variables ξ e ζ of which $\zeta = 1 - \xi$.

For any generic load condition, their use becomes immediate with accurate results.

Also for the f_a deflection for the first of (9) for P concentrated load on a simply supported beam, is,

$$f_{a0} = A(\xi) \frac{P}{K}$$

$$\text{with } K = \frac{384EJ}{\ell^3} \quad (21')$$

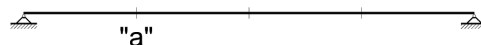
Considering a generic and also variable load $p = p(\xi)$ from ξ_1 to ξ_2 we have $dP = p(\xi)d\xi$ from which $df_{a0} = A(\xi)dP/K = (1/K) A(\xi)p(\xi)d\xi$.

The deflection is obtained by integration over the development of the beam $f_{a0} = \frac{1}{K} \int_{\xi_1}^{\xi_2} A(\xi)p(\xi)d\xi$ (21).

As already known, coefficient $A(\xi)$ assumes two forms depending on the stretch of integration:

- a. preceding the control point ("a" in this case at the 1st quarter of beam) we have

$$A_1(\xi) = (21\xi - 48\xi^3) \quad (22)$$



- b. after the control point that is for others $\frac{3}{4}$ of the beam we have

$$A_2(\xi) = (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) \quad (23)$$

the (21) integral becomes

$$f_{a0} = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} A_1(\xi)p(\xi)d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} A_2(\xi)p(\xi)d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384EJ} = \alpha \frac{\ell^4 p}{384EJ} \quad (23')$$

where ξ_1 and ξ_2 are the limits for loading in the first quarter and ξ_3 and ξ_4 are the limits for loads in the three quarters subsequent to point "a". α is therefore a number.

With this integration one can deduce all formulas relating to distributed and variable loads both in magnitude and in position.

Similarly it is obtained for f_{m0} and f_{b0}

$$f m_0 = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} B_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} B_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \frac{\ell^4}{384 E J} = \beta \times \frac{\ell^4 \times p}{384 E J} \quad (24^1)$$

$$B_1(\xi) = (24\xi - 32\xi^3) \quad (24)$$

$$B_2(\xi) = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \quad (25)$$

$B_1(\xi)$ per la forza posizionata nella prima metà della trave e $B_2(\xi)$ posizionata nella seconda metà della trave.

* * *

$$f b_0 = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} C_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} C_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384 E J} = \gamma \times \frac{\ell^4 \times p}{384 E J} \quad (25^1)$$

$$C_1(\xi) = (15\xi - 16\xi^3) \quad (26)$$

$$C_2(\xi) = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27) \quad (27)$$

$C_1(\xi)$ vale per la forza posizionata nei primi 3/4 della trave

$C_2(\xi)$ vale per la forza posizionate nell'ultimo quarto della trave.

Così gli spostamenti totali dovuti ai carichi ed alle coppie di bordo risulta

$$f_a = \alpha \frac{\ell^4 p}{384 E J} - \frac{21\ell^4}{384 E J} a_1 p \ell^4 - \frac{15p}{384 E J} a_2 \ell^4$$

$$f_m = \beta \frac{p \ell^4}{384 E J} - \frac{24}{384} p a_1 \ell^4 - \frac{24}{384} p a_2 \ell^4$$

$$f_b = \gamma \frac{p \ell^4}{384 E J} - \frac{15}{384 E J} p \ell^4 a_1 - \frac{21}{384 E J} p \ell^4 a_2$$

$$\text{ponendo } H_1 = \frac{384}{p \ell^4} \quad (27^1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_a H_1 &= \alpha - 21a_1 - 15a_2 \\ f_m H_1 &= \beta - 24a_1 - 24a_2 \\ f_b H_1 &= \gamma - 15a_1 - 21a_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

La (28) è simile alla (13) dove α, β, γ sostituiscono A, B, C. Quindi per carichi distribuiti si ha

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{(7\alpha - 5\gamma) f m + (8\gamma - 7\beta) f a + (5\beta - 8\alpha) f b}{48 (1.5 f_m - f_a - f_b)} \\ a_2 &= \frac{(7\gamma - 5\alpha) f m + (5\beta - 8\gamma) f a + (8\alpha - 7\beta) f b}{48 (1.5 f_m - f_a - f_b)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

I valori dei momenti agli appoggi valgono

$$m_1 = a_1 q \ell^2 \quad m_2 = a_2 q \ell^2 \quad (30)$$

Il momento in mezzzeria vale

$$M_m = M_{\text{mezzzeriaisostatica}} - 0.5 q \ell^2 (a_1 + a_2) \quad (31)$$

La freccia in mezzzeria vale

$$f_t = \frac{p \ell^4}{384 E J} [\beta - 24(a_1 + a_2)] \quad (32)$$

Tale freccia teorica è da confrontare con quelle di prova f_m .

$$f m_0 = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} B_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} B_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \frac{\ell^4}{384 E J} = \beta \times \frac{\ell^4 \times p}{384 E J} \quad (24^1)$$

$$B_1(\xi) = (24\xi - 32\xi^3) \quad (24)$$

$$B_2(\xi) = (32\xi^3 - 96\xi^2 + 72\xi - 8) \quad (25)$$

$B_1(\xi)$ for the force in the first half of the beam and $B_2(\xi)$ positioned in the second half of the beam.

* * *

$$f b_0 = \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} C_1(\xi) p(\xi) d\xi + \int_{\xi_3}^{\xi_4} C_2(\xi) p(\xi) d\xi \right] \times \frac{\ell^4}{384 E J} = \gamma \times \frac{\ell^4 \times p}{384 E J} \quad (25^1)$$

$$C_1(\xi) = (15\xi - 16\xi^3) \quad (26)$$

$$C_2(\xi) = (48\xi^3 - 144\xi^2 + 123\xi - 27) \quad (27)$$

$C_1(\xi)$ applies to the force positioned in the first 3/4 of the beam

$C_2(\xi)$ applies to the force positioned in the last quarter of the beam.

This way, total displacements due to edge loads and torques are

$$f_a = \alpha \frac{\ell^4 p}{384 E J} - \frac{21\ell^4}{384 E J} a_1 p \ell^4 - \frac{15p}{384 E J} a_2 \ell^4$$

$$f_m = \beta \frac{p \ell^4}{384 E J} - \frac{24}{384} p a_1 \ell^4 - \frac{24}{384} p a_2 \ell^4$$

$$f_b = \gamma \frac{p \ell^4}{384 E J} - \frac{15}{384 E J} p \ell^4 a_1 - \frac{21}{384 E J} p \ell^4 a_2$$

$$\text{assuming } H_1 = \frac{384}{p \ell^4} \quad (27^1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_a H_1 &= \alpha - 21a_1 - 15a_2 \\ f_m H_1 &= \beta - 24a_1 - 24a_2 \\ f_b H_1 &= \gamma - 15a_1 - 21a_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(28) is similar to (13) where α, β, γ replace A, B, C. Therefore for distributed loads we have

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{(7\alpha - 5\gamma) f m + (8\gamma - 7\beta) f a + (5\beta - 8\alpha) f b}{48 (1.5 f_m - f_a - f_b)} \\ a_2 &= \frac{(7\gamma - 5\alpha) f m + (5\beta - 8\gamma) f a + (8\alpha - 7\beta) f b}{48 (1.5 f_m - f_a - f_b)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

The values of the moments at supports are

$$m_1 = a_1 q \ell^2 \quad m_2 = a_2 q \ell^2 \quad (30)$$

The value of the centreline moment is

$$M_m = M_{\text{isostatic centraline}} - 0.5 q \ell^2 (a_1 + a_2) \quad (31)$$

The value of the centreline deflection is

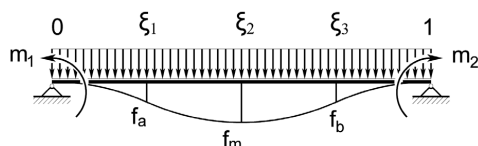
$$f_t = \frac{p \ell^4}{384 E J} [\beta - 24(a_1 + a_2)] \quad (32)$$

This theoretical deflection is to be compared with f_m test ones.

4.1. Esempi teorici per carichi ripartiti

Esempio n. 1

Carico q costante su tutta la trave



La (21) diviene

$$\frac{K}{\ell} f_{a_0} = \int_0^{\xi_1} q A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_1}^1 q A_2(\xi) d\xi$$

$$q \int_0^{0.25} (21\xi - 48\xi^3) d\xi + q \int_{0.25}^1 (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) d\xi$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{a_0} = [10.5\xi^2 - 12\xi^4]_0^{0.25} + [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.25}^1 =$$

$$0.609375 + 2.953125 = 3.5625 = \frac{57}{16}$$

$$f_{a_0} = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{384EJ} \quad \alpha = \frac{57}{16}$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{m_0} = \int_0^{0.5} B_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^1 B_2(\xi) d\xi$$

sostituendo ed integrando come in precedenza si ha:

$$f_{m_0} = \frac{5q\ell^4}{384EJ} \quad \text{ossia } \beta = 5$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{b_0} = \int_0^{0.75} C_1(\xi) d\xi + \int_{0.75}^1 C_2(\xi) d\xi$$

sostituendo ed integrando si ha

$$f_{b_0} = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{EJ384} \quad \gamma = \frac{57}{16} = \alpha$$

Sostituendo i valori α, β, γ , nella (29) si ha

$$a_1 = \frac{57fm - 52fa - 28fb}{384(1.5fm - fa - fb)} \quad a_2 = \frac{57fm - 28fa - 52fb}{384(1.5fm - fa - fb)} \quad (33)$$

I momenti agli appoggi valgono $m_1 = a_1 q \ell^2$ $m_2 = a_2 q \ell^2$

La freccia teorica in mezzzeria vale dalla (32) con $\beta = 5$

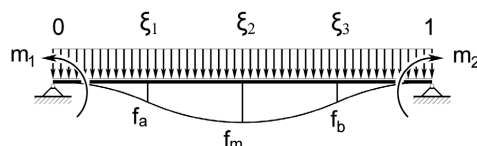
$$f_t = \frac{q\ell^4}{384EJ} [5 - 24(a_1 + a_2)]$$

oppure

4.1. Theoretical examples for distributed loads

Example n. 1

Load q constant along all the beam



Formula (21) becomes

$$\frac{K}{\ell} f_{a_0} = \int_0^{\xi_1} q A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_1}^1 q A_2(\xi) d\xi$$

$$q \int_0^{0.25} (21\xi - 48\xi^3) d\xi + q \int_{0.25}^1 (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) d\xi$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{a_0} = [10.5\xi^2 - 12\xi^4]_0^{0.25} + [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.25}^1 =$$

$$0.609375 + 2.953125 = 3.5625 = \frac{57}{16}$$

$$f_{a_0} = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{384EJ} \quad \alpha = \frac{57}{16}$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{m_0} = \int_0^{0.5} B_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^1 B_2(\xi) d\xi$$

replacing and integrating as above we have:

$$f_{m_0} = \frac{5q\ell^4}{384EJ} \quad \text{ossia } \beta = 5$$

$$\frac{K}{q\ell} f_{b_0} = \int_0^{0.75} C_1(\xi) d\xi + \int_{0.75}^1 C_2(\xi) d\xi$$

that is replacing and integrating we have

$$f_{b_0} = \frac{57}{16} \frac{q\ell^4}{EJ384} \quad \gamma = \frac{57}{16} = \alpha$$

Substituting the values α, β, γ , in (29) we have

$$a_1 = \frac{57fm - 52fa - 28fb}{384(1.5fm - fa - fb)} \quad a_2 = \frac{57fm - 28fa - 52fb}{384(1.5fm - fa - fb)} \quad (33)$$

The values of the moments at supports are $m_1 = a_1 q \ell^2$ $m_2 = a_2 q \ell^2$

The theoretical centreline deflection value is (32) with $\beta = 5$

$$f_t = \frac{q\ell^4}{384EJ} [5 - 24(a_1 + a_2)]$$

or

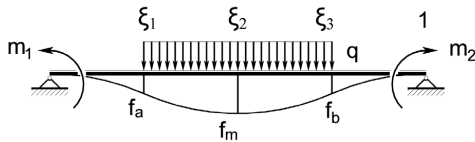
$$f_i = \frac{\ell^2}{384 EJ} [5q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)]$$

Il momento in mezzzeria vale

$$M_m = \frac{1}{2} q \ell^2 (0.25 - a_1 - a_2)$$

Esempio n. 2

Carico costante q nella zona centrale.



$$\text{con } \xi_1 = 0,25 \quad \xi_2 = 0,5 \quad \xi_3 = 0,75$$

Incidento il carico nel secondo e terzo quarto della trave si ha $\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = \int_{0,25}^{0,75} A_2(\xi) d\xi$ usando le espressioni precedenti.

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = \int_{0,25}^{0,75} (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) d\xi = [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16,5\xi^2 - \xi]_{0,25}^{0,75}$$

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = 2,5 \quad \alpha = 2,5$$

$$f_{a0} = 2,5 \times \frac{q \ell^4}{384}$$

Analogamente

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{m0} = \frac{57}{16} \quad \text{ossia } f_{m0} = \frac{q \ell^4}{384 EJ} \times \frac{57}{16} \quad \beta = \frac{57}{16}$$

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{b0} = \int_{0,25}^{0,75} C_1(\xi) d\xi = \int_{0,25}^{0,75} (15\xi - 16\xi^3) d\xi = 2,5$$

$$\gamma = 2,5$$

$$f_{b0} = 2,5 \times \frac{q \ell^4}{384 EJ} \quad \text{stesso valore di } f_{a0}.$$

Quindi le (28) divengono

$$H_1 f_a = 2,5 - 21a_1 - 15a_2$$

$$H_1 f_m = \frac{57}{16} - 24a_1 - 24a_2$$

$$H_1 f_b = 2,5 - 15a_1 - 21a_2$$

$$\alpha = \gamma = 2,5 = \frac{40}{16} \quad \beta = \frac{57}{16}$$

Dalle (29) si ha

$$a_1 = \frac{80f_m - 79f_a - 35f_b}{768(1,5f_m - f_a - f_b)} \quad a_2 = \frac{80f_m - 35f_a - 79f_b}{768(1,5f_m - f_a - f_b)} \quad (34)$$

$$- \text{ I momenti agli appoggi sono } m_1 = a_1 q \ell^2 \quad m_2 = a^2 q \ell^2$$

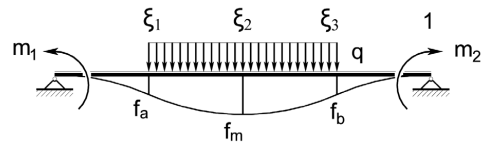
$$(32^1) \quad f_i = \frac{\ell^2}{384 EJ} [5q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)]$$

The value of the midspan moment is

$$M_m = \frac{1}{2} q \ell^2 (0.25 - a_1 - a_2)$$

Example n. 2

Constant q load in the central area.



$$\text{with } \xi_1 = 0,25 \quad \xi_2 = 0,5 \quad \xi_3 = 0,75$$

Being the load applied to the second and third quarter of the beam. We have $\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = \int_{0,25}^{0,75} A_2(\xi) d\xi$ using the previous expressions.

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = \int_{0,25}^{0,75} (16\xi^3 - 48\xi^2 + 33\xi - 1) d\xi = [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16,5\xi^2 - \xi]_{0,25}^{0,75}$$

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{a0} = 2,5 \quad \alpha = 2,5$$

$$f_{a0} = 2,5 \times \frac{q \ell^4}{384}$$

Analogously we obtain

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{m0} = \frac{57}{16} \quad \text{that is } f_{m0} = \frac{q \ell^4}{384 EJ} \times \frac{57}{16} \quad \beta = \frac{57}{16}$$

$$\frac{K}{\ell \cdot q} f_{b0} = \int_{0,25}^{0,75} C_1(\xi) d\xi = \int_{0,25}^{0,75} (15\xi - 16\xi^3) d\xi = 2,5$$

$$\gamma = 2,5$$

$$f_{b0} = 2,5 \times \frac{q \ell^4}{384 EJ} \quad \text{the same value as } f_{a0}.$$

Therefore (28) become

$$H_1 f_a = 2,5 - 21a_1 - 15a_2$$

$$H_1 f_m = \frac{57}{16} - 24a_1 - 24a_2$$

$$H_1 f_b = 2,5 - 15a_1 - 21a_2$$

$$\alpha = \gamma = 2,5 = \frac{40}{16} \quad \beta = \frac{57}{16}$$

From (29) we have

$$a_1 = \frac{80f_m - 79f_a - 35f_b}{768(1,5f_m - f_a - f_b)} \quad a_2 = \frac{80f_m - 35f_a - 79f_b}{768(1,5f_m - f_a - f_b)} \quad (34)$$

$$- \text{ The moments at supports are } m_1 = a_1 q \ell^2 \quad m_2 = a^2 q \ell^2$$

– Il momento in mezzzeria vale

$$Mm = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{3}{16} - a_1 - a_2 \right)$$

La freccia teorica in mezzzeria vale

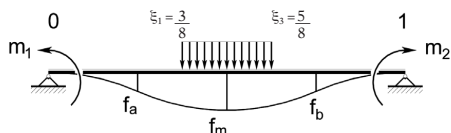
$$f_t = \frac{q\ell^4}{384 EJ} \left[\frac{57}{16} - 24(a_1 + a_2) \right] \quad (35)$$

oppure

$$f_t = \frac{\ell^2}{384 EJ} \left[\frac{57}{16} q\ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (35')$$

Esempio n. 3

Carico q nel quarto centrale



Analogamente all'esempio precedente si ha

$$\frac{K}{\ell q} f_{a_0} = \int_{3/8}^{5/8} A_2(\xi) d\xi \quad \text{con } A_2 \text{ dalle (23) e si ha}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{a_0} = \frac{43}{32} \quad \text{da cui} \quad f_{a_0} = \frac{43}{32} \frac{q\ell^4}{384 EJ}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{m_0} = \int_{3/8}^{0.5} B_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^{5/8} B_2(\xi) d\xi = \frac{497}{256}$$

$$f_{m_0} = \frac{497}{256} \times \frac{q\ell^4}{384 EJ}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{b_0} = \int_{3/8}^{0.5} C_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^{5/8} C_2(\xi) d\xi = \frac{43}{32}$$

$$f_{b_0} = f_{a_0}$$

Quindi le (28) divengono

$$H_1 f_a = \frac{43}{32} - 21a_1 - 15a_2$$

$$H_1 f_m = \frac{497}{256} - 24a_1 - 24a_2$$

$$H_1 f_b = \frac{43}{32} - 24a_2 - 24a_2$$

$$\alpha = \gamma = \frac{43}{32} = \frac{344}{256} \quad \beta = \frac{497}{256}$$

– The value of the midspan moment is

$$Mm = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{3}{16} - a_1 - a_2 \right)$$

The value of the theoretical centreline deflection is

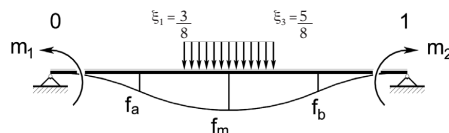
$$f_t = \frac{q\ell^4}{384 EJ} \left[\frac{57}{16} - 24(a_1 + a_2) \right] \quad (35)$$

or

$$f_t = \frac{\ell^2}{384 EJ} \left[\frac{57}{16} q\ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (35')$$

Example n. 3

Load q in the centre quarter



Similar to the previous example, we have

$$\frac{K}{\ell q} f_{a_0} = \int_{3/8}^{5/8} A_2(\xi) d\xi \quad \text{with } A_2 \text{ from (23) and we have}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{a_0} = \frac{43}{32} \quad \text{da cui} \quad f_{a_0} = \frac{43}{32} \frac{q\ell^4}{384 EJ}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{m_0} = \int_{3/8}^{0.5} B_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^{5/8} B_2(\xi) d\xi = \frac{497}{256}$$

$$f_{m_0} = \frac{497}{256} \times \frac{q\ell^4}{384 EJ}$$

$$\frac{K}{\ell q} f_{b_0} = \int_{3/8}^{0.5} C_1(\xi) d\xi + \int_{0.5}^{5/8} C_2(\xi) d\xi = \frac{43}{32}$$

$$f_{b_0} = f_{a_0}$$

Therefore (28) become

$$H_1 f_a = \frac{43}{32} - 21a_1 - 15a_2$$

$$H_1 f_m = \frac{497}{256} - 24a_1 - 24a_2$$

$$H_1 f_b = \frac{43}{32} - 24a_2 - 24a_2$$

$$\alpha = \gamma = \frac{43}{32} = \frac{344}{256} \quad \beta = \frac{497}{256}$$

Dalle (29) si ha

$$a_1 = \frac{688fm - 727fa - 267fb}{12288(1.5fm - fa - fb)} \quad a_2 = \frac{688fm - 267fa - 727fb}{12288(1.5fm - fa - fb)} \quad (36)$$

Il momento in mezzzeria vale

$$Mm = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{7}{64} - a_1 - a_2 \right)$$

La freccia teorica in mezzzeria vale

$$f_t = \frac{q\ell^4}{384EJ} \left[\frac{497}{256} - 24(a_1 + a_2) \right] \quad (37)$$

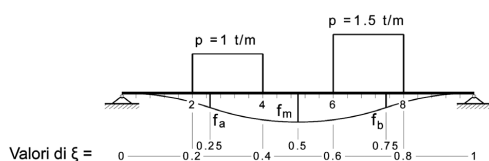
Esempio n. 4

Per illustrare in maniera più esaustiva il metodo esposto, si applica la procedura al calcolo di una trave con più carichi distribuiti su aree parziali.

Si considera una trave di luce $l = 10\text{m}$

Il carico sia costituito da due tratti con carichi uniformi $p_1 = 1.00\text{ t/m}$ $p_2 = 1.50\text{ t/m}$ aventi estensione su strisce di 2m.

La posizione dei carichi è riportata alla figura successiva



Si applica la procedura precedente con l'utilizzo delle varie funzioni di influenza.

La procedura è implementata in un apposito codice di calcolo realizzato tramite l'utilizzo di un manipolatore algebrico.

Come fatto in precedenza la freccia f_a si calcola integrando i carichi con l'opportuna funzione A_j

In particolare si ha quindi

$$\frac{K}{l} f_{a0} = \int_{0.20}^{0.25} p_1 A_1(\xi) d\xi + \int_{0.25}^{0.40} p_1 A_2(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.8} p_2 A_2(\xi) d\xi =$$

$$p_2 = 1.5p_1$$

$$\frac{K}{\ell p_1} f_{a0} = [10.5\xi^2 - 12\xi^4]_{0.2}^{0.25} + [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.25}^{0.4} +$$

$$+ 1.5[4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.6}^{0.8} = 2.178$$

$$f_{a0} = 2.178 \quad p_1 \frac{\ell^4}{384EJ} \quad 2.178 = \alpha$$

Analogamente

From (29) we have

$$a_1 = \frac{688fm - 727fa - 267fb}{12288(1.5fm - fa - fb)} \quad a_2 = \frac{688fm - 267fa - 727fb}{12288(1.5fm - fa - fb)} \quad (36)$$

The value of the midspan moment is

$$Mm = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{7}{64} - a_1 - a_2 \right)$$

The value of the theoretical midspan deflection is

$$f_t = \frac{q\ell^4}{384EJ} \left[\frac{497}{256} - 24(a_1 + a_2) \right] \quad (37)$$

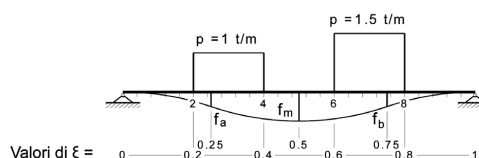
Example n. 4

In order to illustrate the above method in a more comprehensive way, the procedure is applied to the calculation of a beam with several loads distributed over partial areas.

A beam with a span of $l = 10\text{m}$ is considered

The load consists of two sections with uniform loads $p_1 = 1.00\text{ t/m}$ $p_2 = 1.50\text{ t/m}$ having an extension on strips of 2 linear metres.

The position of the loads is illustrated in the following figure



The previous procedure is applied using the various influence functions.

The procedure is implemented in a separate calculation code made using an algebraic manipulator.

As done previously, the f_a deflection is calculated by integrating the loads with the appropriate function A_j

In particular, we therefore have

$$\frac{K}{l} f_{a0} = \int_{0.20}^{0.25} p_1 A_1(\xi) d\xi + \int_{0.25}^{0.40} p_1 A_2(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.8} p_2 A_2(\xi) d\xi =$$

$$p_2 = 1.5p_1$$

$$\frac{K}{\ell p_1} f_{a0} = [10.5\xi^2 - 12\xi^4]_{0.2}^{0.25} + [4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.25}^{0.4} +$$

$$+ 1.5[4\xi^4 - 16\xi^3 + 16.5\xi^2 - \xi]_{0.6}^{0.8} = 2.178$$

$$f_{a0} = 2.178 \quad p_1 \frac{\ell^4}{384EJ} \quad 2.178 = \alpha$$

Similarly

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = \int_{0.2}^{0.4} p_1 B_1(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.8} p_2 B_2(\xi) d\xi \quad \text{da cui}$$

0.2 1° e 2° quarto 0.6 3° e 4° quarto

$$fm_0 = 3.12 \frac{p_1 \ell^4}{384EJ} \quad \beta = 3.12$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = \int_{0.2}^{0.4} p_1 C_1(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.75} p_2 C_1(\xi) d\xi + \int_{0.75}^{0.8} p_2 C_2(\xi) d\xi$$

0.2 1° e 2° quarto 0.6 3° quarto 0.75 4° quarto

Analogamente agli sviluppi precedenti

$$fb_0 = 2.274 p_1 \frac{\ell^4}{384EJ} \quad \gamma = 2.274$$

Tali valori sono le frecce per la trave appoggiata.

Analogamente alla (28) si ha

$$\begin{cases} H_1 fa = 2.178 - 21a_1 - 15a_2 \\ H_1 fm = 3.12 - 24a_1 - 24a_2 \\ H_1 fb = 2.274 - 15a_1 - 21a_2 \end{cases}$$

$$\alpha = 2.178 \quad \beta = 3.12 \quad \gamma = 2.274$$

I valori di a_1 ed a_2 sono dati dalla (29)

$$a_1 = \frac{3.87552fm - 3.64672fa - 1.82432fb}{48(1.5fm - fa - fb)}$$

$$a_2 = \frac{5.029fm - 2.594fa - 4.416fb}{48(1.5fm - fa - fb)}$$

La freccia teorica in mezzeria vale

$$H_1 ft = 3.12 - 24a_1 - 24a_2 \quad H_1 = \frac{384EJ}{p\ell^4}$$

dalla (32)

$$ft = \frac{p_1 \ell^4}{384EJ} [3.12 - 24a_1 - 24a_2]$$

Con la conoscenza dei valori di fa fm fb misurati nella prova di carico si calcolano la freccia teorica ft , da confrontare con fm , ottenuta dalla prova di carico e le caratteristiche di sollecitazione.

5. Carichi concentrati su mensola

Premesse

Nei collaudi statici specie di fabbricati civili è frequente affrontare prove di carico su balconi o terrazzi "a sbalzo".

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = \int_{0.2}^{0.4} p_1 B_1(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.8} p_2 B_2(\xi) d\xi \quad \text{from which}$$

0.2 1st and 2nd quarter 0.6 3rd and 4th quarter

$$fm_0 = 3.12 \frac{p_1 \ell^4}{384EJ} \quad \beta = 3.12$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = \int_{0.2}^{0.4} p_1 C_1(\xi) d\xi + \int_{0.6}^{0.75} p_2 C_1(\xi) d\xi + \int_{0.75}^{0.8} p_2 C_2(\xi) d\xi$$

0.2 1st and 2nd quarter 0.6 3rd quarter 0.75 4th quarter

Similarly to previous developments

$$fb_0 = 2.274 p_1 \frac{\ell^4}{384EJ} \quad \gamma = 2.274$$

These values are the deflections for the supported beam.

Similarly to (28) we have

$$\begin{cases} H_1 fa = 2.178 - 21a_1 - 15a_2 \\ H_1 fm = 3.12 - 24a_1 - 24a_2 \\ H_1 fb = 2.274 - 15a_1 - 21a_2 \end{cases}$$

$$\alpha = 2.178 \quad \beta = 3.12 \quad \gamma = 2.274$$

The values of a_1 ed a_2 are given by (29)

$$a_1 = \frac{3.87552fm - 3.64672fa - 1.82432fb}{48(1.5fm - fa - fb)}$$

$$a_2 = \frac{5.029fm - 2.594fa - 4.416fb}{48(1.5fm - fa - fb)}$$

The value of the theoretical centreline deflection is

$$H_1 ft = 3.12 - 24a_1 - 24a_2 \quad H_1 = \frac{384EJ}{p\ell^4}$$

from (32)

$$ft = \frac{p_1 \ell^4}{384EJ} [3.12 - 24a_1 - 24a_2]$$

With the knowledge of the fa fm fb values measured in the load test, the theoretical deflection ft is calculated, to compare with fm , obtained from load testing and the stress characteristics.

5. Concentrated loads on bracket

Premises

In static tests especially for residential buildings, it is common to deal with load tests on "cantilever" balconies or terraces.

La struttura in prova non sempre è perfettamente vincolata all'incastro, bensì questi può avere un abbassamento e spesso anche una rotazione. Così che la freccia misurata all'estremità è quella complessiva e non è solo la deformazione di flessione propria della soletta, deformazione che deve essere confrontata con quella teorica di calcolo. Così con questa breve nota si intende calcolare la deduzione dalla freccia complessiva gli eventuali contributi del cedimento dell'appoggio e della rotazione dello stesso.

Teoria

Per mensola perfettamente incastrata la funzione f della deformata è (fig. 4):

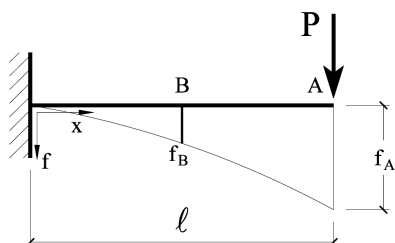


Fig. 4

$$f = \frac{1}{6EJ} p \ell^3 \xi^2 (3 - \xi)$$

$$\xi = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{per } x = \ell \text{ punto A } \xi = 1 \quad f_A = \frac{1}{3EJ} p \ell^3 = \frac{16}{48} \frac{p \ell^3}{EJ}$$

$$\text{per } x = \frac{\ell}{2} \text{ punto B } \xi = 0.5 \quad f_B = \frac{5}{48} \frac{p \ell^3}{EJ} = \frac{5}{16} f_A$$

Se avviene la rotazione ed un cedimento dell'incastro dello sbalzo si ha:

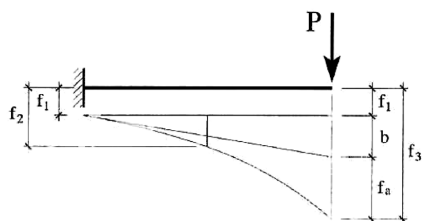


Fig. 5

The test structure is not always perfectly constrained to the fixing point, but this can sag and often also rotate. So that the deflection measured at the end is the overall one and it is not just the bending deformation typical of a slab, deformation that must be compared with the theoretical calculation. So, with this brief note, we mean calculating the deduction from the overall deflection of any contribution of support yielding and rotation.

Theory

For a perfectly fixed bracket the f function of the deformed is (fig. 4):

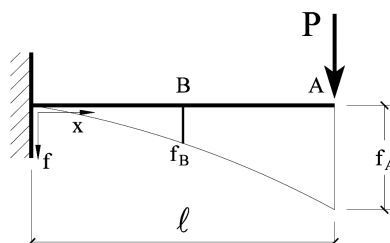


Fig. 4

$$f = \frac{1}{6EJ} p \ell^3 \xi^2 (3 - \xi)$$

$$\xi = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{for } x = \ell \text{ point A } \xi = 1 \quad f_A = \frac{1}{3EJ} p \ell^3 = \frac{16}{48} \frac{p \ell^3}{EJ}$$

$$\text{for } x = \frac{\ell}{2} \text{ point B } \xi = 0.5 \quad f_B = \frac{5}{48} \frac{p \ell^3}{EJ} = \frac{5}{16} f_A$$

Considering that the support allow the rotation and a vertical displacement the we obtain

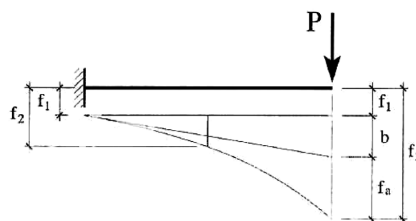


Fig. 5

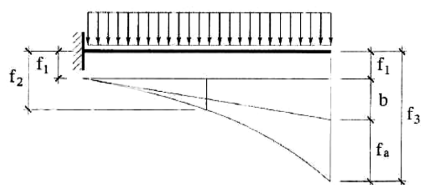
$$(38) \begin{cases} f_a = f_3 - b - f_1 \\ f_2 = \frac{b}{2} + f_1 + \frac{5}{16} f_a \end{cases} \text{risolvendo si ha}$$

$$f_a = \frac{8}{3} (f_3 + f_1 - 2f_2)$$

Quindi misurando gli abbassamenti di prova f_1, f_2, f_3 si ottiene f_a di prova da confrontare con quella teorica.

Se il carico è distribuito

$$f_a = \frac{24}{7} (f_3 - 2f_2 + f_1) \quad (40)$$



APPENDICE CON ESEMPI

A. Esempi applicativi per carichi concentrati

A.1. Esempio n. 5

Sia una trave in cls $\ell = 20m$ con $EJ = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ daN}\cdot\text{cm}^2$ caricata con 4 forze i cui valori e posizioni sono indicati in fig. A1.

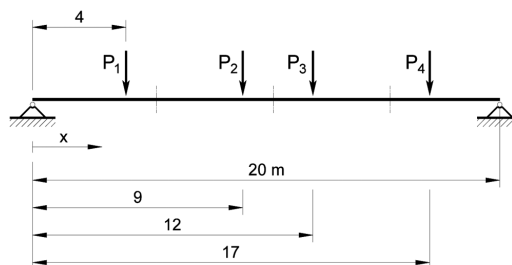


Fig. A1 - Posizione carichi.

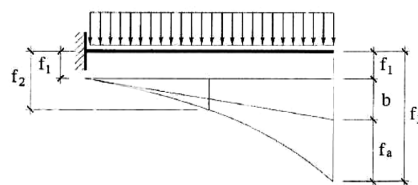
$$(38) \begin{cases} f_a = f_3 - b - f_1 \\ f_2 = \frac{b}{2} + f_1 + \frac{5}{16} f_a \end{cases} \text{and solving for } f_a \text{ it results}$$

$$(39) \quad f_a = \frac{8}{3} (f_3 + f_1 - 2f_2) \quad (39)$$

Then, measuring from the test the deflection f_1, f_2, f_3 we can determine the displacement f_a directly from the these data and compare it with the theoretical value.

If the load is uniformly distributed it results

$$f_a = \frac{24}{7} (f_3 - 2f_2 + f_1) \quad (40)$$



APPENDIX WITH EXAMPLES

A. Application examples for concentrated loads

A.1. Example n. 5

A concrete beam, $\ell = 20m$ with $EJ = 1.55 \cdot 10^{12} \text{ daN}\cdot\text{cm}^2$ is loaded with 4 forces whose values and positions are shown in fig. A1.

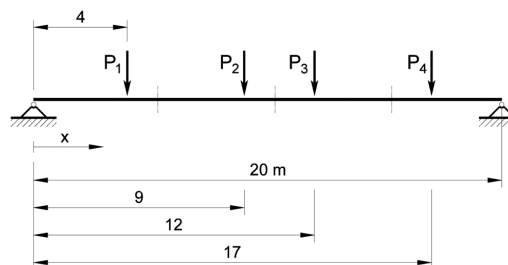


Fig. A1 - Position of loads.

P	KN	x	ξ
P_1	20	4	0.2
P_2	50	9	0.45
P_3	60	12	0.6
P_4	30	17	0.85
TOT	160		

$$R_2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{50}{20} = 2.5$$

$$R_3 = \frac{P_3}{P_1} = \frac{60}{20} = 3$$

$$R_4 = \frac{P_4}{P_1} = \frac{30}{20} = 1.5$$

$$A_1 = (21\xi_1 - 48\xi_1^3) = 3.816$$

$$A_2 = (16\xi_2^3 - 48\xi_2^2 + 33\xi_2 - 1) = 5.588$$

$$A_3 = (16\xi_3^3 - 48\xi_3^2 + 33\xi_3 - 1) = 4.976$$

$$A_4 = (16\xi_4^3 - 48\xi_4^2 + 33\xi_4 - 1) = 2.196$$

$$* A = A_1 + A_2 R_2 + A_3 R_3 + A_4 R_4 = 3.816 + 5.588 \times 2.5 + 4.976 \times 3 + 2.196 \times 1.5 = 36.008$$

$$B_1 = (24\xi_1 - 32\xi_1^3) = 4.544$$

$$B_2 = (24\xi_2 - 32\xi_2^3) = 7.884$$

$$B_3 = (32\xi_3^3 - 96\xi_3^2 + 72\xi_3 - 8) = 8$$

$$B_4 = (32\xi_4^3 - 96\xi_4^2 + 72\xi_4 - 8) = 3.492$$

$$* B = B_1 + B_2 R_2 + B_3 R_3 + B_4 R_4 = 4.544 + 7.884 \times 2.5 + 8 \times 3 + 3.492 \times 1.5 = 53.492$$

$$C_1 = (15\xi_1 - 16\xi_1^3) = 2.872$$

$$C_2 = (15\xi_2 - 16\xi_2^3) = 5.292$$

$$C_3 = (15\xi_3 - 16\xi_3^3) = 5.544$$

$$C_4 = (48\xi_4^3 - 144\xi_4^2 + 123\xi_4 - 27) = 2.988$$

$$* C = C_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4 = 2.872 + 5.292 \times 2.5 + 5.544 \times 3 + 2.988 \times 1.5 = 37.216$$

$$* R = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1} = \frac{160}{20} = 8$$

La prova di carico ha dato i seguenti valori di abbassamento in centimetri (fig. A2).

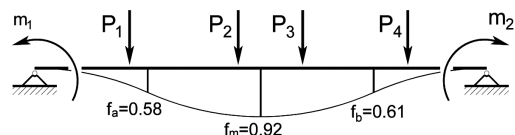


Fig. A2

P	KN	x	ξ
P_1	20	4	0.2
P_2	50	9	0.45
P_3	60	12	0.6
P_4	30	17	0.85
TOT	160		

$$R_2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{50}{20} = 2.5$$

$$R_3 = \frac{P_3}{P_1} = \frac{60}{20} = 3$$

$$R_4 = \frac{P_4}{P_1} = \frac{30}{20} = 1.5$$

$$A_1 = (21\xi_1 - 48\xi_1^3) = 3.816$$

$$A_2 = (16\xi_2^3 - 48\xi_2^2 + 33\xi_2 - 1) = 5.588$$

$$A_3 = (16\xi_3^3 - 48\xi_3^2 + 33\xi_3 - 1) = 4.976$$

$$A_4 = (16\xi_4^3 - 48\xi_4^2 + 33\xi_4 - 1) = 2.196$$

$$* A = A_1 + A_2 R_2 + A_3 R_3 + A_4 R_4 = 3.816 + 5.588 \times 2.5 + 4.976 \times 3 + 2.196 \times 1.5 = 36.008$$

$$B_1 = (24\xi_1 - 32\xi_1^3) = 4.544$$

$$B_2 = (24\xi_2 - 32\xi_2^3) = 7.884$$

$$B_3 = (32\xi_3^3 - 96\xi_3^2 + 72\xi_3 - 8) = 8$$

$$B_4 = (32\xi_4^3 - 96\xi_4^2 + 72\xi_4 - 8) = 3.492$$

$$* B = B_1 + B_2 R_2 + B_3 R_3 + B_4 R_4 = 4.544 + 7.884 \times 2.5 + 8 \times 3 + 3.492 \times 1.5 = 53.492$$

$$C_1 = (15\xi_1 - 16\xi_1^3) = 2.872$$

$$C_2 = (15\xi_2 - 16\xi_2^3) = 5.292$$

$$C_3 = (15\xi_3 - 16\xi_3^3) = 5.544$$

$$C_4 = (48\xi_4^3 - 144\xi_4^2 + 123\xi_4 - 27) = 2.988$$

$$* C = C_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4 = 2.872 + 5.292 \times 2.5 + 5.544 \times 3 + 2.988 \times 1.5 = 37.216$$

$$* R = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1} = \frac{160}{20} = 8$$

The load test gave the following deflection values in centimetres (fig. A2).

Substituting the values: A , B , C , and f_a , f_m , f_b in (19) we have:

$$M = 48R(1.5 f_m - f_a - f_b) = 48 \times 8 \times (1.5 \times 0.92 - 0.58 - 0.61) = 72.96$$

$$a_1 = \frac{65.976 \times 0.92 - 76.716 \times 0.58 - 20.604 \times 0.61}{72.96} = 0.04981$$

$$\text{Similarly } a_2 = 0.0519 \quad a_1 + a_2 = 0.10171$$

From (20) moments at the ends have a value of

$$m_1 = a_1 P_1 \ell R = 0.04981 \times 2000 \times 20 \times 8 = 15939 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

$$m_2 = a_2 P_1 \ell R = 0.0519 \times 2000 \times 20 \times 8 = 16608 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

Sostituendo i valori: A, B, C , ed f_a, f_m, f_b nella (19) si ha
 $M = 48R(1.5 f_m - f_a - f_b) = 48 \cdot 8 \cdot (1.5 \cdot 0.92 - 0.58 - 0.61) = 72,96$
 $a_1 = \frac{65.976 \times 0.92 - 76.716 \times 0.58 - 20.604 \times 0.61}{72.96} = 0.04981$

Analogamente $a_2 = 0.0519$ $a_1 + a_2 = 0.10171$

Dalle (20) i momenti alle estremità valgono

$$m_1 = a_1 P_1 \ell R = 0.04981 \cdot 2000 \cdot 20 \cdot 8 = 15939 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

$$m_2 = a_2 P_1 \ell R = 0.0519 \cdot 2000 \cdot 20 \cdot 8 = 16608 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

Il momento in mezzzeria vale

$$M_m = \left[\xi_1 + R_2 \xi_2 - R_3 \xi_3 - R_4 \xi_4 + R_3 + R_4 - R(a_1 + a_2) \right] \frac{P_1 \ell}{2} =$$

$$\frac{20 \cdot 20}{2} [0.2 + 2.5 \times 0.45 - 3 \times 0.6 - 1.5 \times 0.85 + 3 + 1.5 -$$

$$8 \times 0.10171] = 387,264 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

La freccia teorica in mezzzeria vale dalla (20')

$$f_t = \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24 R(a_1 + a_2)]$$

$$f_t = \frac{2000 \cdot 2000^3}{384 \cdot 1.55 \cdot 10^{12}} [53.492 - 24 \cdot 8 \cdot 0.10171] = 0.913 \text{ cm}$$

La freccia teorica 0.913 cm è quindi molto simile a quella effettiva di prova di carico pari a 0.92 cm ed indipendentemente dalle ipotesi dei vincoli e caratteristiche di progetto. Con tali misurazioni e calcoli si individua il vero comportamento della struttura con i suoi vincoli reali realizzati nella costruzione.

A.2 Esempio n. 6

L'esempio seguente riporta una prova di collaudo di un solettone intermedio di un'importante struttura multipiano interrata (fig. A3).



Fig. A3 - Complesso strutturale con solettone superiore. *Structural complex with top slab.*

The value of the centreline moment is

$$M_m = \left[\xi_1 + R_2 \xi_2 - R_3 \xi_3 - R_4 \xi_4 + R_3 + R_4 - R(a_1 + a_2) \right] \frac{P_1 \ell}{2} =$$

$$\frac{20 \cdot 20}{2} [0.2 + 2.5 \times 0.45 - 3 \times 0.6 - 1.5 \times 0.85 + 3 + 1.5 -$$

$$8 \times 0.10171] = 387,264 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

The value of the theoretical centreline deflection is from (20')

$$f_t = \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24 R(a_1 + a_2)]$$

$$f_t = \frac{2000 \cdot 2000^3}{384 \cdot 1.55 \cdot 10^{12}} [53.492 - 24 \cdot 8 \cdot 0.10171] = 0.913 \text{ cm}$$

The 0.913 cm theoretical deflection is therefore very similar to the actual load test one equal to 0.92 cm and regardless of the constraint hypotheses and characteristics of the project. With these measurements and calculations, the real behaviour of the structure with its real constraints in construction can be identified.

A.2 Example n. 6

The following example shows an inspection test of an intermediate slab of an important underground multi-storey structure (fig. A3).

The load was carried out by two hydraulic load cells with contrast to the upper slab (fig. A4).



Fig. A4 - Pistoni idraulici di carico del solettone intermedio contrastati dal solettone superiore. *Hydraulic load pistons of the intermediate slab contrasted by the upper slab.*

Il carico è stato effettuato mediante due celle di carico idraulico con contrasto al solettone superiore (fig. A4).

Il solaio è realizzato mediante elementi alveolari tipo SPYROLL con luce di calcolo $\ell = 10.5m$, la rigidità complessiva di una striscia larga 1 m è pari a $EJ=5.4 \cdot 10^{11} daN \cdot cm^2$ come risulta dai dati di progetto. Più propriamente sarebbe necessario controllare specie il valore della E dell'elemento in opera così come il J realmente realizzato poiché talvolta differiscono da quelli di progetto ed i valori di collaudo si riferiscono a quanto realizzato e non ipotizzato di progetto.

La posizione dei carichi ed i punti di lettura sono rappresentati nella fig. A5.

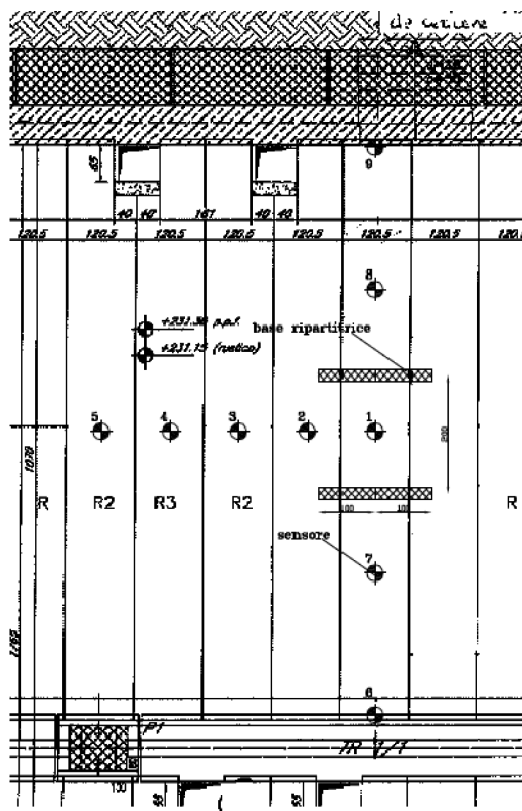


Fig. A5 - Posizione carichi e strumenti di lettura. Position of loads and reading tools.

Le letture dei comparatori n. 1-2-3-4 e 5 della fig. A6 permettono di calcolare la ripartizione trasversale, analogamente a quanto raffigurato negli esempi precedenti.

Nel caso considerato, il coefficiente K_f risulta pari a $K_f = 0.3178$, con il seguente calcolo:

The floor is made of alveolar SPYROLL type elements with calculated span $\ell = 10.5m$, the overall stiffness of a 1 m wide strip is equal to $EJ=5.4 \cdot 10^{11} daN \cdot cm^2$ as in the project data. More properly it is necessary to check the value of E of the element in-site as well as the J value actually realised because they sometimes differ from the project ones and test values refer to what is created and not assumed.

The position of the loads and the reading points are represented in fig. A5.

The readings of the comparators n. 1-2-3-4 and 5 of fig. A6 allow the calculation of the transverse distribution, as shown in the previous examples.

In the case in question, coefficient K_f is equal to $K_f = 0.3178$ with the following calculation:

$$A/2 = \left[12/2 + (12+22)/2 + (22+34)/2 + (34+49)/2 + (49+58)/2 \right] \times 1.25 = 182.5m \times mm \times 10^{-2}$$

$$A = 365m \times mm \times 10^{-2} \quad K1 = \frac{b \times f_m}{A} = \frac{2 \times 58}{365} = 0.3178$$

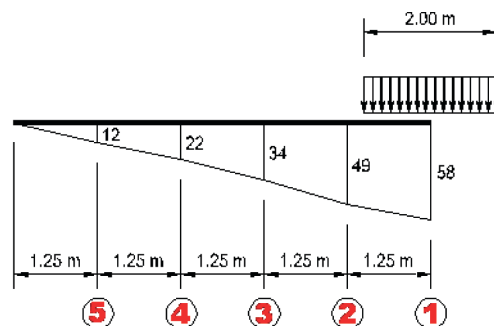


Fig. A6 - Calcolo ripartizione trasversale. Transverse distribution calculation.

The load attributed to each of the jacks is equal to $F = 5227 daN$. By applying this coefficient, the forces applied to the 1 m wide floor strip are reduced to $P_1 = P_2 = 166 daN$.

The fig. A7 reports the values of readings of comparators 6-7-1-8 and 9, while the readings of f_a , f_m , and f_b are shown in red, deducted by the constraint yielding. They are expressed in hundredths of a millimetre in the terms below:

$$f_a = 31.75, \quad f_m = 48.50, \quad f_b = 26.25$$

p	daN	x	ξ
P ₁	1661	4.25	0.4048
P ₂	1661	6.25	0.5952
P _{TOT}	3322		

$$A/2 = \left[12/2 + (12 + 22)/2 + (22 + 34)/2 + (34 + 49)/2 + (49 + 58)/2 \right] \times 1.25 = 182.5 \text{ m} \times \text{mm} \times 10^{-2}$$

$$A = 365 \text{ m} \times \text{mm} \times 10^{-2} \quad K1 = \frac{b \times f_m}{A} = \frac{2 \times 58}{365} = 0.3178$$

Il carico attribuito a ciascuno dei martinetti è pari a $F = 5227 \text{ daN}$. Mediante l'applicazione di tale coefficiente, le forze applicate alla striscia di solaio larga 1 m si riducono a $P_1 = P_2 = 166 \text{ daN}$.

La fig. A7 riporta i valori delle letture ai comparatori 6-7-1-8 e 9, mentre in rosso sono indicate le letture di f_a , f_m ed f_b , depurate dal cedimento dei vincoli. Esse sono espresse in centesimi di millimetro, nei termini in appresso:

$$f_a = 31.75, \quad f_m = 48.50, \quad f_b = 26.25$$

p	daN	x	ξ
P_1	1661	4.25	0.4048
P_2	1661	6.25	0.5952
P_{TOT}	3322		

$$R_2 = \frac{P_2}{P_1} = 1$$

$$R = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 2$$

$$\begin{aligned} A_1 &= (16\xi_1^3 - 48\xi_1^2 + 33\xi_1 - 1) = 5.5543 \\ A_2 &= (16\xi_2^3 - 48\xi_2^2 + 33\xi_2 - 1) = 5.0107 \\ B_1 &= (24\xi_1 - 32\xi_1^3) = 7.5926 \\ B_2 &= (32\xi_2^3 - 96\xi_2^2 + 72\xi_2 - 8) = 7.5926 \\ C_1 &= (15\xi_1 - 16\xi_1^3) = 5.0107 \\ C_2 &= (\xi_2 - 16\xi_2^3) = 5.5543 \\ A &= A_1 + R_2 A_2 = 10.5650 \\ B &= B_1 + R_2 B_2 = 15.1852 \\ C &= C_1 + R_2 C_2 = 10.5650 \end{aligned}$$

I valori di a_1 ed a_2 sono dati dalla (19)

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)fm + (8C - 7B)fa + (5B - 8A)fb \\ Ma_2 = (7A - 5A)fm + (5B - 8C)fa + (8A - 7B)fb \end{cases} \quad (19)$$

$$M = 48 \cdot 2(1.5 \cdot 48.50 - 31.75 - 26.25) = 1416$$

$$\begin{cases} 1416 \times a_1 = 21.121 \times 48.50 - 21.77626 \times 31.75 - 8.5940 \times 26.25 \\ 1416 \times a_2 = 21.121 \times 48.50 - 8.5940 \times 31.75 - 21.77626 \times 26.25 \end{cases}$$

$$a_1 = 0.0761 \quad a_2 = 0.1273$$

I momenti reali d'incastro sono dati dalla (20) e valgono:

$$\begin{cases} m_1 = a_1 P_1 R \ell = 2654.44 \text{ daN}^* \text{ m} / \text{m} \\ m_2 = a_2 P_1 R \ell = 4440.35 \text{ daN}^* \text{ m} / \text{m} \end{cases} \quad (20)$$

CALCULATION OF ACTUAL FIXING MOMENTS
CALCOLO DEI MOMENTI DI INCASTRO EFFETTIVI

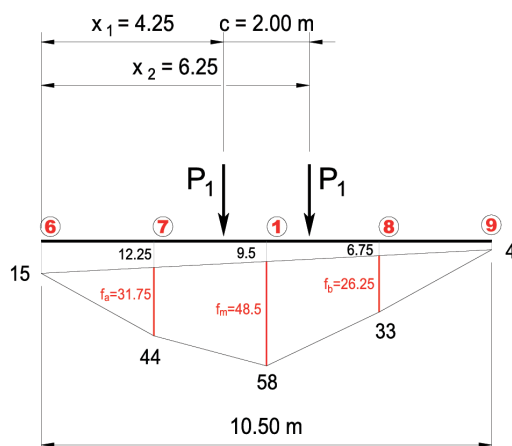


Fig. A7

$$R_2 = \frac{P_2}{P_1} = 1$$

$$R = \frac{P_1 + P_2}{P_1} = 2$$

$$\begin{aligned} A_1 &= (16\xi_1^3 - 48\xi_1^2 + 33\xi_1 - 1) = 5.5543 \\ A_2 &= (16\xi_2^3 - 48\xi_2^2 + 33\xi_2 - 1) = 5.0107 \\ B_1 &= (24\xi_1 - 32\xi_1^3) = 7.5926 \\ B_2 &= (32\xi_2^3 - 96\xi_2^2 + 72\xi_2 - 8) = 7.5926 \\ C_1 &= (15\xi_1 - 16\xi_1^3) = 5.0107 \\ C_2 &= (\xi_2 - 16\xi_2^3) = 5.5543 \\ A &= A_1 + R_2 A_2 = 10.5650 \\ B &= B_1 + R_2 B_2 = 15.1852 \\ C &= C_1 + R_2 C_2 = 10.5650 \end{aligned}$$

The values of a_1 and a_2 are given by (19)

$$\begin{cases} Ma_1 = (7A - 5C)fm + (8C - 7B)fa + (5B - 8A)fb \\ Ma_2 = (7A - 5A)fm + (5B - 8C)fa + (8A - 7B)fb \end{cases} \quad (19)$$

$$M = 48 \cdot 2(1.5 \cdot 48.50 - 31.75 - 26.25) = 1416$$

$$\begin{cases} 1416 \times a_1 = 21.121 \times 48.50 - 21.77626 \times 31.75 - 8.5940 \times 26.25 \\ 1416 \times a_2 = 21.121 \times 48.50 - 8.5940 \times 31.75 - 21.77626 \times 26.25 \end{cases}$$

$$a_1 = 0.0761 \quad a_2 = 0.1273$$

The real fixing moments are given by (20) and have a value of:

$$\begin{cases} m_1 = a_1 P_1 R \ell = 2654.44 \text{ daN}^* \text{ m} / \text{m} \\ m_2 = a_2 P_1 R \ell = 4440.35 \text{ daN}^* \text{ m} / \text{m} \end{cases} \quad (20)$$

Il momento in mezzera vale:

$$M_m = P_1 \frac{\ell}{2} [(\xi_1 - R_2 \xi_2 + R_2) R(a_1 + a_2)] = 1661 * \frac{10.5}{2} [0.4048 + 0.4048 - 2(0.2034)] = 3512$$

Con tale valore si può calcolare il carico equivalente uniformemente distribuito su tutto il solaio uguagliando i momenti.

$$M_m = \frac{1}{8} q \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2); 3512 = \frac{1}{8} q 10.5^2 - \frac{1}{2} (2654 + 4440)$$

da cui $q = 512 \text{ daN} \times m$

La freccia teorica in mezzera vale dalla (20¹):

$$f_1 = \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24 R(a_1 + a_2)]$$

$$f_1 = \frac{1.661 * 1050^3}{384 * 5.4 * 10^{12}} * 5.4224 = 0.0503 \text{ cm}$$

Uguagliando le frecce si ottiene dalla (32¹)

$$\frac{P_1 \ell^3}{384 E J} * 5.4224 = \frac{\ell^2}{384 E J} [5 q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)]$$

con $m_1 = 265400 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, $m_2 = 444000 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, $P = 1661 \text{ daN}$, $\ell = 1050 \text{ cm}$ si ottiene $q_1 = 480 \text{ daPa}$

molto simile al precedente calcolato uguagliando i momenti e tali valori sono assai prossimi ai 600 kg/m^2 previsti nel progetto.

Il valore della freccia teorica $f_1 = 0.0503 \text{ cm}$ calcolata con i parametri geometrici di calcolo (luce ℓ rigidità EJ) e con i dati effettivi di carico con distribuzione trasversale e di reale incastro ai bordi, è confrontabile con quella effettiva, f_m , determinata in misura pari a 0.0485 cm .

B. Esempi applicativi per carichi ripartiti

B.1 Esempio n. 7

È, di seguito, rappresentata una prova di collaudo su solettone di copertura di galleria artificiale, effettuata mediante l'utilizzo di una serie di automezzi pesanti (fig. B8) nell'ambito di un rilevante complesso di opere realizzate in Torino. La relazione di collaudo è stata redatta in data 9/7/09.

La struttura

La struttura è composta da un impalcato di travi pre-comprese affiancate, solidarizzate con cappa collaborante, con getto di massetto di completamento.

Il calcolo di progetto considera le travi incastrate alla struttura portante verticale di sinistra e appoggiate a

The value of the centreline moment is

$$M_m = P_1 \frac{\ell}{2} [(\xi_1 - R_2 \xi_2 + R_2) R(a_1 + a_2)] = 1661 * \frac{10.5}{2} [0.4048 + 0.4048 - 2(0.2034)] = 3512$$

With this value it is possible to calculate the equivalent load distributed over the all floor to be equal the bending moments.

$$M_m = \frac{1}{8} q \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2); 3512 = \frac{1}{8} q 10.5^2 - \frac{1}{2} (2654 + 4440)$$

from which $q = 512 \text{ daN} \times m$

The theoretical centreline deflection value is (20¹):

$$f_1 = \frac{P_1 \ell^3}{384 E J} [B - 24 R(a_1 + a_2)]$$

$$f_1 = \frac{1.661 * 1050^3}{384 * 5.4 * 10^{12}} * 5.4224 = 0.0503 \text{ cm}$$

Equalising the deflections one gets (32¹)

$$\frac{P_1 \ell^3}{384 E J} * 5.4224 = \frac{\ell^2}{384 E J} [5 q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)]$$

with $m_1 = 265400 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, $m_2 = 444000 \text{ daN} \cdot \text{cm}$, $P = 1661 \text{ daN}$, $\ell = 1050 \text{ cm}$, one gets $q_1 = 480 \text{ daPa}$

very similar to the previous one calculated by equating the moments and these values are very close to 600 kg/m^2 provided for in the project.

The value of the theoretical deflection $f_1 = 0.0503 \text{ cm}$ calculated with geometrical calculation parameters (span ℓ stiffness EJ) and with the actual load data with transverse distribution and real edge fixing, is comparable with the actual one, f_m , determined equal to 0.0485 cm .

B. Application examples of distributed loads

B.1 Example n. 7

The following is a trial test performed on a cover slab of an artificial tunnel, carried out by using a series of heavy vehicles (fig. B8) as part of a large complex of works performed in Turin. The test report was drawn up on 9/7/09.

The structure

The structure consists of a side-by-side prestressed beam deck, jointed with a cope and completed with casted concrete screed.

The project calculation considers the beams fixed to the left load-bearing vertical structure and leaning on the

quelle di destra. Indicando la flessione del solaio, la prova permetterà di calcolare il reale grado d'incastro.



Fig. B8 - Camion carichi adibiti al collaudo. Loaded trucks used for testing.

All'atto della prova era già stato posto uno strato di terrapieno dello spessore di 70 cm circa.

La posizione dei camion è indicata in fig. B9.

A causa del riporto la ripartizione sul solaio dei carichi risulta secondo la fig. B10.

right one. By indicating the floor deflection, the test will allow to calculate the actual fixing degree.

At the time of the test, a layer of embankment with a thickness of 70 cm had already been placed.

The position of the trucks is shown in fig. B9.

Because of the filling, the load distribution on the floor is as in fig. B10.

The sum of the loads resulting from the weight notes is shown in fig. B11.

The zeroed readings and deducted by the yieldings of the supports are shown in table B1.

TABELLA B1 - TABLE B1

LETTURE IN CENTESIMI DI MM
READINGS IN HUNDREDTHS OF MILLIMETRES

Lecture Readings	Carichi/flessimetri Loads/deflectometers	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Scarico Unload	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	n.2 camion No. 2 trucks	0	6	9	4	0	1	13	8	3
3	n.4 camion No. 4 trucks	0	12.5	21	14.5	0	19	20	15	9
4	n.2 camion No. 2 trucks	0	10	8	5	0	11	16	13	8
5	Scarico Unload	0	2	-2	-2	0	0	3	1	0

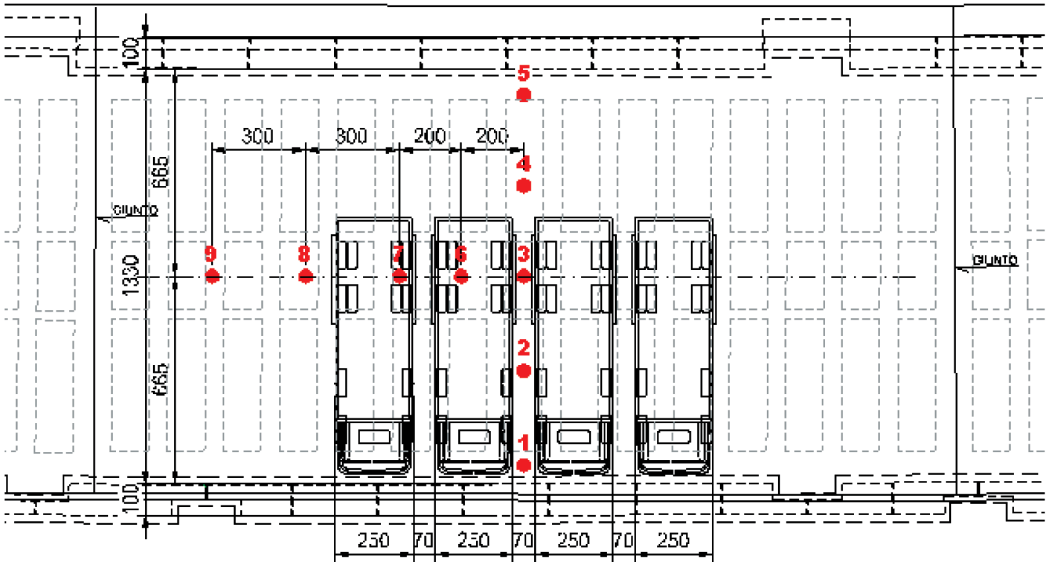


Fig. B9 - Posizione dei camion e dei comparatori centesimali. Position of the trucks and of the centesimal comparators.

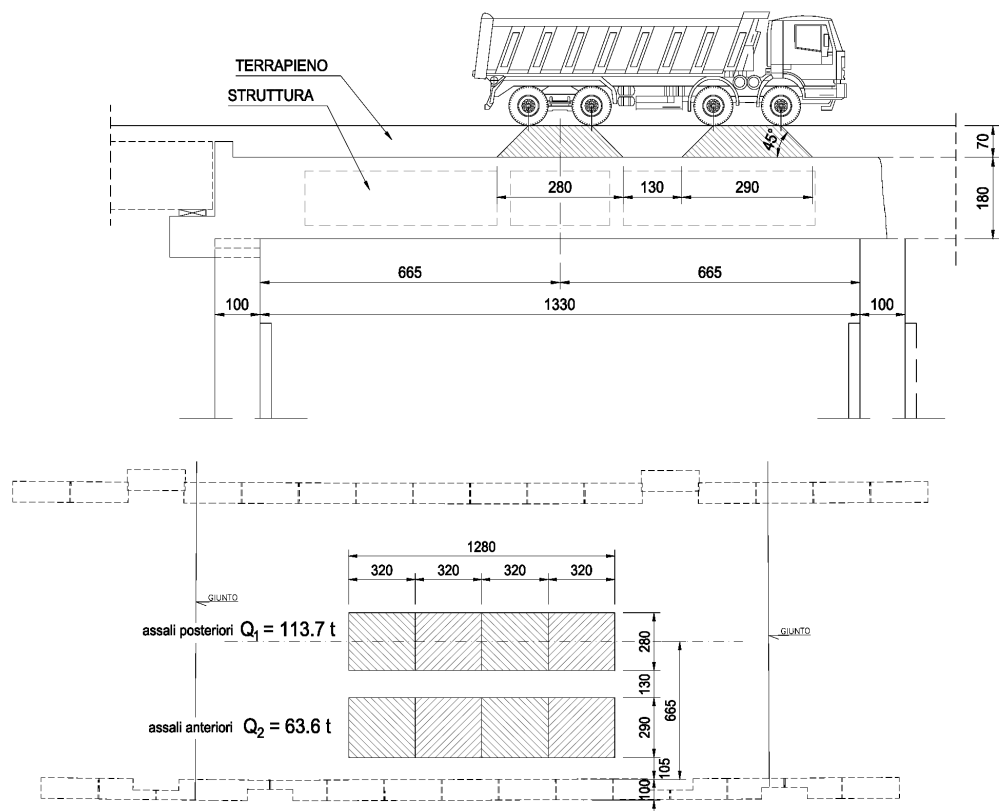


Fig. B10 - Incidenza dei carichi sulla soletta. *Distribution of loads on the slab.* (Terrapieno: embankment - Struttura: structure - Assali posteriori: rear axles - Assali anteriori: front axles)

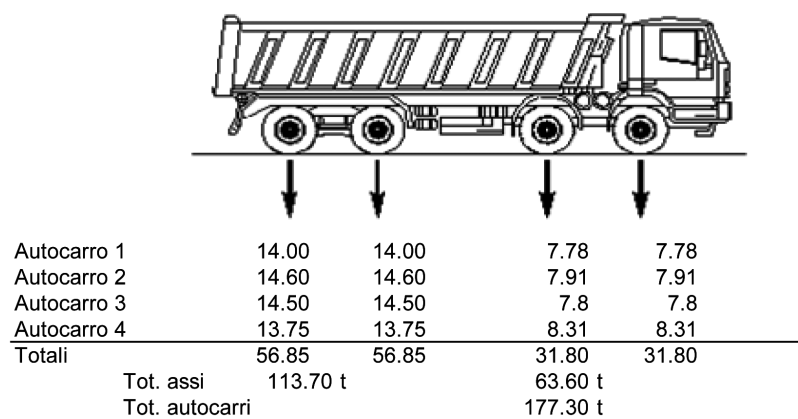


Fig. B11 - Analisi dei carichi di ogni camion e di ogni assale. *Load analysis of each truck and of every axle.* (Autocarri: truck - Totale: Total - Tot. assi: Total axles - Tot. autocarri: Total trucks):

La somma dei carichi risultante dalle bolle dei pesi è riportata in fig. B11.

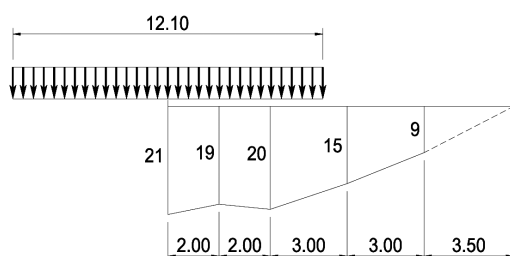
Le letture azzerate e depurate dei cedimenti degli appoggi sono indicati in tab. B1.

In queste prove di carico si constata l'estrema modestia delle inflessioni e talvolta lo sviluppo dei calcoli può essere influenzato da tale particolarità.

I calcoli successivi faranno riferimento al massimo carico.

Coefficiente di ripartizione trasversale

Per il massimo carico i flessimetri della sezione in mezzzeria hanno dato



Coefficiente di ripartizione trasversale

Calcolo dell'area $\frac{A}{2}$ dove si ipotizza lo zero a 3,5m oltre l'ultima misura.

$$\frac{A}{2} = \frac{21+19}{2} \times 2 + \frac{19+20}{2} \times 2 + \frac{20+15}{2} \times 3 + \frac{9}{2} \times 3.5 = 189.25$$

$$A = 378.5$$

$$q = \frac{fm \cdot b}{A} p = \frac{21 \times 12.10}{378.5} p = 0.6713 p$$

$$K_1 = 0.6713$$

Quindi la striscia di solaio centrale larga 1m è caricata con

$$q_1 = 0.6713 \times \frac{113700}{2.8 \times 12.8} = 2130 \text{ daPa}$$

La striscia laterale è caricata con

$$q_2 = 0.6213 \times \frac{63600}{2.9 \times 12.8} = 1150 \text{ daPa}$$

Calcoli teorici

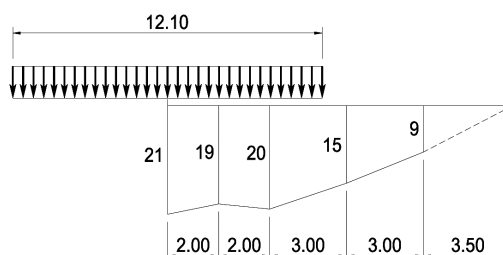
- Determinazione dei gradi d'incastro m_1 ed m_2
- Dati geometrici

In these load tests, the extremely reduced size of deflections is noticed and sometimes the development of calculations can be influenced by this particular.

Subsequent calculations will refer to the maximum load.

Transverse distribution coefficient

For the maximum load, the centreline section deflectionometers gave



Transverse distribution coefficient

Calculation of the area $\frac{A}{2}$ where it is assumed zero at 3.5 m beyond the last measurement.

$$\frac{A}{2} = \frac{21+19}{2} \times 2 + \frac{19+20}{2} \times 2 + \frac{20+15}{2} \times 3 + \frac{9}{2} \times 3.5 = 189.25$$

$$A = 378.5$$

$$q = \frac{fm \cdot b}{A} p = \frac{21 \times 12.10}{378.5} p = 0.6713 p$$

$$K_1 = 0.6713$$

Therefore the centre 1m wide floor strip is loaded with

$$q_1 = 0.6713 \times \frac{113700}{2.8 \times 12.8} = 2130 \text{ daPa}$$

The lateral strip is loaded with

$$q_2 = 0.6213 \times \frac{63600}{2.9 \times 12.8} = 1150 \text{ daPa}$$

Theoretical calculations

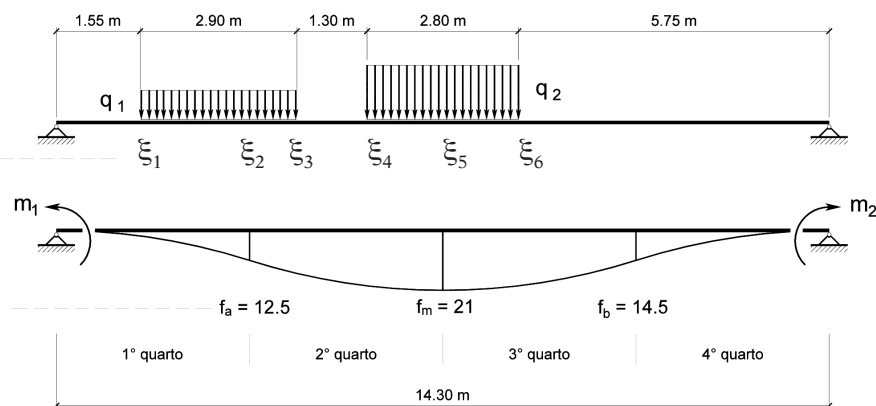
- Determination of fixing degrees m_1 ed m_2
- Geometric data

Test floor width $b = 1 \text{ m}$

Beam span $\ell = 14.30 \text{ m}$ $EJ = 12.4 \times 10^{12} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$ according to project.

Parameters ξ
of Integration limits
Parametri ξ dei
limiti di integrazione

Letture della prova
Test readings



Larghezza del solaio di prova $b=1m$

Luce trave

$\ell = 14.30m$ $EJ = 12.4 \times 10^{12} daN \cdot cm^2$ di progetto.

Tale valore è stato ottenuto ipotizzando una $E = 30.000 MPa$

In fase di collaudo tale valore è stato riscontrato ridotto pari a $E = 27.500 MPa$

Quindi la rigidezza reale risulta essere $EJ=11.37 \times 10^{12} daN \cdot cm^2$ per la striscia larga 1m.

$$K = \frac{384EJ}{\ell^3}$$

– Carichi $q_1 = 11.5 daN/cm$ $q = 21.3 daN/cm$ $q_1 = 0.549q$

– Parametri dei limiti di integrazione dei carichi

$$\xi_1 = \frac{155}{1430} = 0.1084 \quad \xi_2 = \frac{357.5}{1430} = 0.25 \quad \xi_3 = \frac{445}{1430} = 0.3122$$

$$\xi_4 = \frac{575}{1430} = 0.4021 \quad \xi_5 = 0.5 \quad \xi_6 = 0.5979$$

Dalla teoria ed analogamente all'esempio n. 6 si ha

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} q_1 A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_3} q_1 A_2(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q A_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_3} q B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q B_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 C_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q C_1(\xi) d\xi$$

dove $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ sono le funzioni note.

Integrando le funzioni nei limiti indicati si ottiene come negli esempi precedenti

This value was obtained by assuming a $E = 30.000 MPa$

During the testing phase this value was found reduced to an amount equal to $E = 27.500 MPa$

Therefore the actual stiffness for the 1 m wide strip turns out to be $EJ = 11.37 \times 10^{12} daN \cdot cm^2$

$$K = \frac{384EJ}{\ell^3}$$

– Loads $q_1 = 11.5 daN/cm$ $q = 21.3 daN/cm$ $q_1 = 0.549q$

– Parameters of the load integration limits

$$\xi_1 = \frac{155}{1430} = 0.1084 \quad \xi_2 = \frac{357.5}{1430} = 0.25 \quad \xi_3 = \frac{445}{1430} = 0.3122$$

$$\xi_4 = \frac{575}{1430} = 0.4021 \quad \xi_5 = 0.5 \quad \xi_6 = 0.5979$$

From the theory and similarly to example n. 6 we have

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} q_1 A_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_3} q_1 A_2(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q A_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_2}^{\xi_3} q B_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q B_2(\xi) d\xi$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = \int_{\xi_1}^{\xi_3} q_1 C_1(\xi) d\xi + \int_{\xi_4}^{\xi_5} q C_1(\xi) d\xi$$

where $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ are known functions

Integrating the functions within the limits indicated, the result obtained is as in the previous examples

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = q \times 1.4846$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = q \times 2.0493$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = q \times 1.38666$$

Gli spostamenti dovuti anche alle coppie m_1 ed m_2 d'incastro dove $m_1 = a_1 q \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q \ell^2$

e ponendo $H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{K}{q}$ le (28) divengono

$$\begin{cases} H_1 fa = 1.4846 - 21a_1 - 15a_2 \\ H_1 fm = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 \quad \text{dove } \alpha = 1.4846 \\ \beta = 2.0493 \quad \gamma = 1.38666 \\ H_1 fb = 1.38666 - 15a_1 - 21a_2 \end{cases}$$

Sostituendo nelle (29) i valori α, β, γ , ed i valori di spostamenti $fa = 12.5$ $fm = 21$ $fb = 14.5$ ottenuti dalla prova di carico si ha $a_1 = 0.038657$ $a_2 = 0.007290$.

Per la striscia di solaio larga 1m, i momenti d'incastro valgono

$$m_1 = a_1 q \ell^2 = 0.038657 \times 2130 \times 14.3^2 = 16837 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_2 = a_2 q \ell^2 = 0.007293 \times 2130 \times 14.3^2 = 3176 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

La freccia in mezzzeria vale

$$H_1 \times ft = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 = 0.946572$$

$$H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{384 \times 11.37 \times 10^{12}}{21.3 \times 1430^4} = 49.01$$

$$ft = \frac{0.946572}{49.01} = 0.01931 \text{ cm valore assai prossimo allo}$$

spostamento reale di collaudo fm pari a 0.021cm.

Considerazioni finali

– Dai calcoli esposti si evince che il bordo, nei calcoli di progetto considerato appoggiato, produce in effetti un vincolo reale flessionale, seppur modesto.

– Il carico uniforme sul solaio equivalente a quelle di prova, approssimativamente, risulta: dalle

$$Mm = \frac{1}{8} q \ell^2 - (m_1 + m_2) \frac{1}{2}$$

si ha $24.237 = \frac{1}{8} q 14.3^2 - 10.006$ $q = 10 \text{ KPa}$ contro i 20 KPa richiesti dal progetto.

– La freccia di prova $fm = 0.021 \text{ cm}$ è molto simile a

$$\frac{K}{\ell} fa_0 = q \times 1.4846$$

$$\frac{K}{\ell} fm_0 = q \times 2.0493$$

$$\frac{K}{\ell} fb_0 = q \times 1.38666$$

Displacements also due to m_1 and m_2 fixing torques where $m_1 = a_1 q \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q \ell^2$

and assuming $H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{K}{q}$ (28) become

$$\begin{cases} H_1 fa = 1.4846 - 21a_1 - 15a_2 \\ H_1 fm = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 \quad \text{where } \alpha = 1.4846 \\ \beta = 2.0493 \quad \gamma = 1.38666 \\ H_1 fb = 1.38666 - 15a_1 - 21a_2 \end{cases}$$

Substituting in (29) values α, β, γ , and the values of displacements $fa = 12.5$ $fm = 21$ $fb = 14.5$ resulting from the load test we have $a_1 = 0.038657$ $a_2 = 0.007290$.

For 1m large floor strip, the fixing moments have a value of

$$m_1 = a_1 q \ell^2 = 0.038657 \times 2130 \times 14.3^2 = 16837 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_2 = a_2 q \ell^2 = 0.007293 \times 2130 \times 14.3^2 = 3176 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

The value of the centreline deflection is

$$H_1 \times ft = 2.0493 - 24a_1 - 24a_2 = 0.946572$$

$$H_1 = \frac{384EJ}{q\ell^4} = \frac{384 \times 11.37 \times 10^{12}}{21.3 \times 1430^4} = 49.01$$

$$ft = \frac{0.946572}{49.01} = 0.01931 \text{ cm value very close to the real } fm$$

test displacement equal to 0.021 cm.

Final considerations

– Calculations show that the edge, considered as supported in project calculations, produces a real bending constraint, albeit modest.

– The uniform load on the floor equivalent to the test one is approximately:

$$Mm = \frac{1}{8} q \ell^2 - (m_1 + m_2) \frac{1}{2}$$

against $24.237 = \frac{1}{8} q 14.3^2 - 10.006$ $q = 10 \text{ KPa}$ contro i 20 KPa required by the project.

– The fm test deflection $fm = 0.021 \text{ cm}$ is very similar

quella teorica pari a $f_t=0.01931$ a conferma della correttezza della procedura pur nell'incertezza delle misurazioni.

– Per altro essa risulta estremamente limitata pari a $\frac{0.021}{1430} = \frac{1}{68000}$ della luce a conferma dell'estrema rigidità della struttura.

– Infine a scarico avvenuto il ritorno è stato perfettamente elastico.

B. 2 Esempio n. 8

Prova di carico per il collaudo di un solaio a travetti e blocchi $H = 28\text{ cm}$ e $l = 7\text{ m}$ (fig. B12).

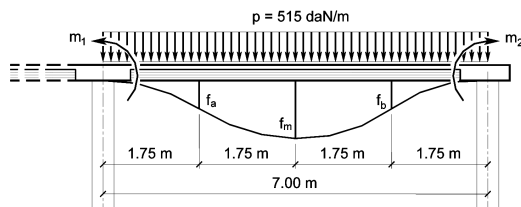


Fig. B12 - Schema di carico trasversale del solaio. Diagram of transverse floor load.

Il peso proprio del solaio all'atto della prova è pari a $p_2 = 3\text{ KPa}$ con: $EJ = 3.2 \cdot 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$ per una striscia di solaio larga 1 m.

Viene caricata una intera striscia larga $b=1.5\text{ m}$ con un carico $p=515 \text{ daN/ml}$.

Carico totale pari a $Q = 7 \cdot 515 = 3605 \text{ daN}$.

Le letture, in cm ai sei flessimetri sotto carico risultano (figg. B13 e B14 e tab. B2).

TABELLA B2

LETTURE AI FLESSIMETRI (cm)

f_m	f_a	f_b	f_1	f_2	f_3
0.13	0.09	0.092	0.08	0.02	0

Determinazione della ripartizione trasversale

Per il calcolo della ripartizione trasversale:

$$q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = K_1 p$$

$$A = \left(\frac{0+0.02}{2} \cdot 1 + \frac{0.02+0.08}{2} \cdot 1 + \frac{0.08+0.13}{2} \cdot 1 \right) \cdot 2 = 0.33$$

$$q = \frac{1.5 \cdot 0.13}{0.33} p = 0.5808 \cdot 515 = 300 \text{ daN/ml}$$

to the theoretical one equal to $f_t = 0.01931$ confirming the correctness of the procedure while in the uncertainty of measurements.

– Moreover it is extremely limited and equal to $\frac{0.021}{1430} = \frac{1}{68000}$ of the span, confirming the extreme stiffness of the structure.

– Finally after unloading, recovery was perfectly elastic.

B. 2 Example n. 8

Load test for the final inspection of a joist and block floor $H = 28\text{ cm}$ and $l = 7\text{ m}$ (fig. B12).

The weight of the floor at the time of the test is equal to $p_2 = 3\text{ KPa}$ with: $EJ = 3.2 \cdot 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$ for a 1 m large floor strip.

A whole strip wide $b = 1.5\text{ m}$ is loaded with a load $p = 515 \text{ daN/ml}$.

Total load equal to $Q = 7 \cdot 515 = 3605 \text{ daN}$.

Readings, in cm of 6 deflectionometers under load are (figg. B13 and B14 and Table B2).

TABLE B2

DEFLECTOMETER READINGS (cm)

f_m	f_a	f_b	f_1	f_2	f_3
0.13	0.09	0.092	0.08	0.02	0

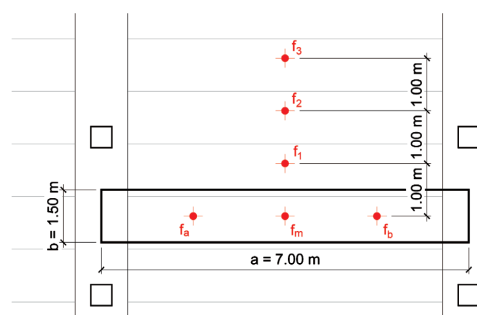


Fig. B13 - Schema di posa in pianta del carico. Diagram of layout of the load.

quindi $K_1 = 0.5808$

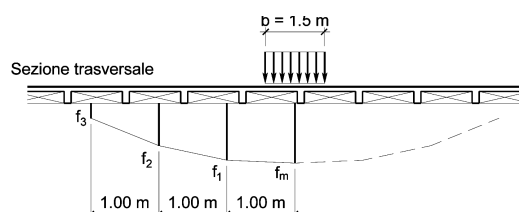


Fig. B14 - Posizionamento trasversale dei flessimetri. Transversal placement of deflectionmeters. (Sezione trasversale: transversal section).

La striscia di solaio larga 1,5 m, caricata nella prova con $p = 515 \text{ daN/m}$, è, pertanto, equivalente ad una striscia larga 1,5 m isolata, caricata con il carico $q = 300 \text{ daN/m}$; ossia, si verifica la medesima situazione che si avrebbe ove l'intero solaio fosse caricato con $q_1 = 2 \text{ KPa}$ pari a 2 daN/cm su striscia larga 1 m.

Calcolo dei momenti flettenti

Attraverso le letture di f_m in mezzeria e f_a e f_b ai quarti della luce riportate nella precedente tabella B1 si calcolano m_1 ed m_2 (fig. B15) con le (33)

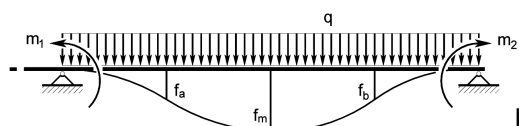


Fig. B15 - Posizione di lettura longitudinale. Longitudinal reading position.

Con: $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$

Dove applicando le (33)

$$a_1 = \frac{57f_m - 52f_a - 28f_b}{384(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{0.154}{4.992} = 0.03085$$

$$a_2 = \frac{57f_m - 28f_a - 52f_b}{384(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{0.106}{4.992} = 0.02123$$

Il calcolo della freccia teorica analogalmente all'es. 3

$$\text{risulta } f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (32')$$

ossia

$$f_i = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} [5 - 24(a_1 + a_2)] = \frac{q_1 \ell^4}{EJ} \cdot \frac{3.375}{384} =$$

$$\frac{2 \cdot 700^4 \cdot 3.75}{384 \cdot 3.2 \cdot 10^{10}} = 0.146 \text{ cm}$$

Determination of transverse distribution

For the calculation of the transverse distribution:

$$q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = K_1 p$$

$$A = \left(\frac{0 + 0.02}{2} \cdot 1 + \frac{0.02 + 0.08}{2} \cdot 1 + \frac{0.08 + 0.13}{2} \cdot 1 \right) \cdot 2 = 0.33$$

$$q = \frac{1.5 \cdot 0.13}{0.33} p = 0.5808 \cdot 515 = 300 \text{ daN/ml}$$

therefore: $K_1 = 0.5808$

The 1.5 m wide floor strip, loaded in the test with $p = 515 \text{ daN/m}$, is therefore equivalent to a 1.5 m wide secluded strip, loaded with load $q = 300 \text{ daN/m}$; i.e., the same situation occurs that would occur if the entire floor was loaded with $q_1 = 2 \text{ KPa}$ equal to 2 daN/cm on a 1 m wide strip.

Calculation of bending moments

Through the f_m centreline readings and f_a and f_b at quarters of the span shown in the above table 1, m_1 and m_2 are calculated (fig. B15) with (33)

With: $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ and $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$

Where applying (33)

$$a_1 = \frac{57f_m - 52f_a - 28f_b}{384(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{0.154}{4.992} = 0.03085$$

$$a_2 = \frac{57f_m - 28f_a - 52f_b}{384(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{0.106}{4.992} = 0.02123$$

The calculation of the theoretical deflection similar to

$$\text{example 3 is } f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \quad (32')$$

that is

$$f_i = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} [5 - 24(a_1 + a_2)] = \frac{q_1 \ell^4}{EJ} \cdot \frac{3.375}{384} =$$

$$\frac{2 \cdot 700^4 \cdot 3.75}{384 \cdot 3.2 \cdot 10^{10}} = 0.146 \text{ cm}$$

Conclusions

The theoretical deflection equal to: $f_i = 0.146 \text{ cm}$ is higher than the actual measured at $f_m = 0.13 \text{ cm}$.

The test centreline bending moment is:

$$M_m = \frac{1}{8} q_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = q_1 \ell^2 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \right] = q_1 \ell^2$$

Conclusioni

La freccia teorica pari a: $f_i = 0.146 \text{ cm}$ è superiore a quella effettiva misurata pari a $f_m = 0.13 \text{ cm}$.

Il momento flettente in mezzera di prova risulta

$$M_m = \frac{1}{8} q_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = q_1 l^2 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \right] = q_1 l^2$$

$$[0.125 - 0.026] = 0.09896 \cdot 200 \cdot 7^2 = 970 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

Ed i momenti flettenti ai bordi risultano:

$$m_1 = a_1 q_1 l^2 = 0.03085 \cdot 200 \cdot 7^2 = 302 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_2 = a_2 q_1 l^2 = 0.02123 \cdot 200 \cdot 7^2 = 208 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

La striscia caricata larga 150 cm rispetta il rapporto suggerito da Pereswiet-Soltan (formula 1)

$$n = \frac{b}{\ell} = \frac{1.5}{7} = 0.2143 > 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2 + \frac{200}{300}}} = 0.02084$$

Tale rapporto è confermato.

B.3 Esempio n. 9

Si riporta la prova di un collaudo, nel quale è richiesta un'omologazione per un carico uniformemente distribuito pari a 35 KPa.

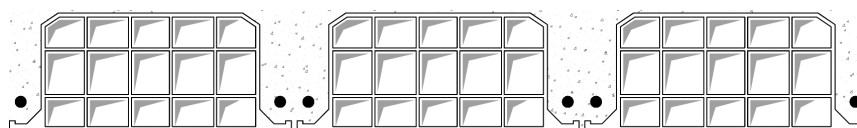


Fig. B16 - Sezione tipologica del solaio. Floor section types.

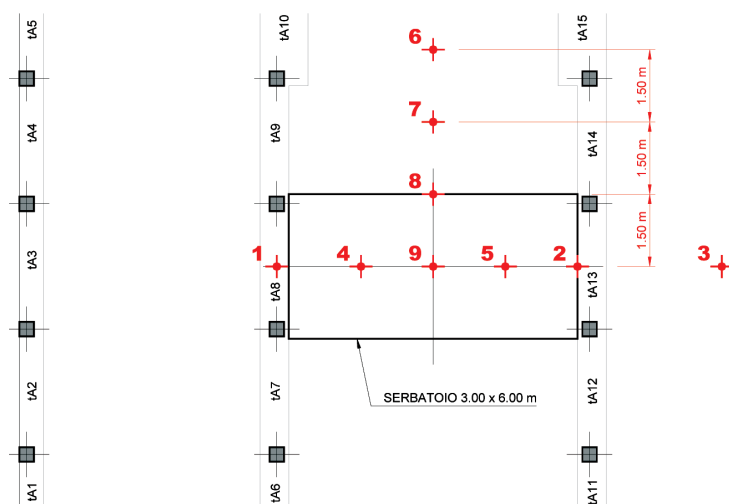


Fig. B17 - Posizionamento dei flessimetri. Positioning of deflectometers.

$$[0.125 - 0.026] = 0.09896 \cdot 200 \cdot 7^2 = 970 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

And bending moments at edges are:

$$m_1 = a_1 q_1 l^2 = 0.03085 \cdot 200 \cdot 7^2 = 302 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

$$m_2 = a_2 q_1 l^2 = 0.02123 \cdot 200 \cdot 7^2 = 208 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

The 150 cm large strip loaded respects the ratio suggested by Pereswiet-Soltan (formula 1)

$$n = \frac{b}{\ell} = \frac{1.5}{7} = 0.2143 > 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2 + \frac{200}{300}}} = 0.02084$$

This ratio is confirmed.

B.3 Example n. 9

Evidence of a test is reported in which an approval is required for a uniformly distributed load equal to 35 KPa.

A strip having width b and length a was loaded.

It is a 3 span continuous floor free below. It is made of slab mixed with chunks of brick and concrete joists shown in figg. B16 and B17.

The tests carried out on-site using appropriate instrumentation resulted in an elastic concrete module. $E = 29.000 \text{ MPa}$. The moment of inertia, according to the table used by manufacturers for this floor is $J = 56.031 \text{ cm}^4$

Therefore $EJ = 1.62 \cdot 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$ for a 1 m wide strip.

The test is performed on the central span of which the net length is of 6 m and the calculation length is of $\ell = 6.3$.

Available load consists of a flexible tank for hydraulic loading with dimensions $b = 3 \text{ m}$ and $a = 6 \text{ m}$ approximately at full load. It is positioned as in fig. B17. The load is therefore considered as distributed over the entire theoretical span length.

Si è provveduto a caricare una striscia di larghezza b e lunghezza a .

Il solaio è a 3 campate in continuità libero sottostante. È realizzato in soletta mista a blocchi di laterizio e travetti in c.a. indicato in figg. B16 e B17.

Le prove eseguite *in loco* con opportuna strumentazione hanno determinato un modulo elastico del cls. $E=29.000 \text{ MPa}$. Il momento d'inerzia, secondo la tabella impiegata dai costruttori per tale solaio, risulta $J=56.031 \text{ cm}^4$.

Quindi $EJ=1,62 \cdot 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$ per una striscia larga 1 m.

La prova viene effettuata sulla campata centrale di luce netta pari a 6 m e luce di calcolo pari a $\ell = 6.3$.

Il carico a disposizione è costituito da un serbatoio flessibile per carico idraulico di dimensioni $b=3 \text{ m}$ ed $a=6 \text{ m}$ circa a pieno carico. Esso viene posizionato come in fig. B17. Il carico si considera, quindi, come distribuito sull'intera luce teorica.

Vengono posizionati n. 9 flessimetri centesimali come indicato in fig. B17.

Determinazione della ripartizione trasversale

Riempendo prudentemente il serbatoio fino a 30 cm di altezza si ha un carico di 3KPa su una larghezza di 3 m e una lunghezza di 6 m. Misurando le frecce si ottengono i valori in mm riportati nella prima fila della tabella B2.

TABELLA B2 - TABLE B2

LETTURE AI FLESSIMETRI AL NETTO DEGLI APPOGGI
DELLA TRAVE (mm)
READINGS ON DEFLECTOMETERS NET OF BEAM SUPPORTS
(mm)

Carico Load	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
3KPa	0.04	0.06	0	0.82	0.85	-0.06	0.27	0.80	1.25
4.3KPa	0.06	0.08	0	1.14	1.19	-0.07	0.39	1.28	1.75
4.3KPa Depurate(*) Purified (*)	0	0		1.07	1.12				1.68
Scarico dopo 12 ore Unload after 12 hours	0.01	0.02	0	0.08	0.06	-0.05	-0.10	0.08	0.10

N. 9 centesimal deflectometers are positioned as indicated in fig. B17.

Determination of transverse distribution

Filling the tank carefully up to 30 cm in height one has a load of 3KPa over a width of 3 m and a length of 6 m. Measuring the deflections, the values in mm in the first line of table B2 are obtained.

The transverse sensors, purifying the readings of deflectometer n. 9 of the yielding of the supports are indicated in fig. B18:

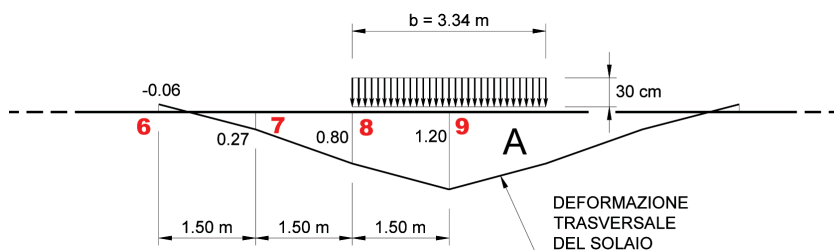


Fig. B18 - Letture ai flessimetri depurate dal n. 9. Deflectometer readings purified from n. 9. (Deformazione trasversale del solaio: Floor transversal deformation).

Given the partial filling, the tank takes an imprint equal to $b = 3.34 \text{ cm}$.

$$q = \frac{f_m b}{A} p$$

$$A = 1.5[-0.06 + 2 \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.8 + 1.2] = 4.92 \text{ m}^2$$

$$q = \frac{1.20 \cdot 3.34}{4.92} p = 0.8146 p$$

If one therefore means to approve the floor (or not) for a load $p_1 = 3.5 \text{ KPa}$ equal to 350 daN/m^2 one must load the 1 m wide strip considered with a hydraulic load

$$q_1 = \frac{p_1}{0.8146} = \frac{350}{0.8146} = 430 \text{ daN/m} \text{ or a 43 cm high hydraulic load in the tank.}$$

Therefore, the test load $p = 430 \cdot 3.2 = 1370 \text{ daN/m}$ on the load imprint, that has taken on a width of 3.20 m, for the entire (approximate) length of the floor is $q_1 = 430 \text{ daN/m}$ on a 1 m wide strip; taking into account the transverse distribution, the entire floor is then loaded with a $p_1 = 3.5 \text{ KPa}$.

For the hydraulic load corresponding to a 43 cm filling of the tank, the readings are shown on the second line of table B2.

I sensori trasversali, depurando le letture del flessimetro n. 9 dal cedimento degli appoggi sono indicati nella fig. B18:

Stante il riempimento parziale il serbatoio assume un'impronta pari a $b=3.34 \text{ cm}$.

$$q = \frac{f_m b}{A} p$$

$$A = 1.5[-0.06 + 2 \cdot 0.27 + 2 \cdot 0.8 + 1.2] = 4.92 \text{ m}^2$$

$$q = \frac{1.20 \cdot 3.34}{4.92} p = 0.8146 p$$

Se si intende, quindi, omologare (o meno) il solaio per un carico $p_l = 3.5 \text{ KPa}$ pari a 350 daN/m^2 è necessario caricare la striscia considerata larga 1 m con un carico idraulico

$$q_1 = \frac{p_l}{0.8146} = \frac{350}{0.8146} = 430 \text{ daN/m} \quad \text{ossia } 43 \text{ cm di altezza di carico idraulico nel serbatoio.}$$

Pertanto, il carico di prova $p = 430 \cdot 3.2 = 1370 \text{ daN/m}$ sull'impronta di carico, che ha assunto la larghezza di 3.20 m, per l'intera (approssimata) lunghezza del solaio risulta di $q_1 = 430 \text{ daN/m}$ su striscia larga 1 m; tenendo conto della ripartizione trasversale, l'intero solaio risulta, quindi, essere caricato con una $p_l = 3.5 \text{ KPa}$.

Per il carico idraulico corrispondente ad un riempimento di 43 cm del serbatoio le letture sono riportate nella seconda linea di tabella B2.

Calcolo dei momenti flettenti

La campata centrale risente degli effetti delle campate laterali i cui effetti sono schematizzabili con due coppie di appoggi.

Le letture ai quarti ed in mezzera della luce depurate dagli abbassamenti degli appoggi per il carico di 4.3 KPa sulla striscia larga 3.20 m (come detto equivalente a $p_l = 3.5 \text{ KPa}$) sono riportati nella terza linea della tabella B2.

Sicché, indicando: $m_1 = a_1 p_l \ell^2$; $m_2 = a_2 p_l \ell^2$; $f_m = f_9$; $f_a = f_4$; $f_b = f_5$;

si ricava applicando le (33):

$$a_1 = \frac{57 f_m - 52 f_a - 28 f_b}{384 (1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 \cdot 1.68 - 52 \cdot 1.07 - 28 \cdot 1.12}{384 (1.5 \cdot 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.069$$

$$a_2 = \frac{57 f_m - 52 f_b - 28 f_a}{384 (1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 \cdot 1.68 - 52 \cdot 1.12 - 28 \cdot 1.07}{384 (1.5 \cdot 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.059$$

$$m_1 = 0.0691 \cdot 350 \cdot 6 \cdot 3^2 = 960 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = 0.0597 \cdot 350 \cdot 6 \cdot 3^2 = 829 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

In mezzera:

$$M = \frac{1}{8} p_l \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{1}{8} 350 \cdot 6 \cdot 3^2 - \frac{960 + 829}{2} = 842 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

Calculation of bending moments

The central main span suffers the effects of lateral spans whose effects can be schematised with two torques placed at the supports.

Readings in the quarters and in the centreline of the span purified from the support yieldings for a load of 4.3 KPa on the 3.20 m width strip (as said equivalent to $p_l = 3.5 \text{ KPa}$) are shown in the third line of table B2.

So, indicating: $m_1 = a_1 p_l \ell^2$; $m_2 = a_2 p_l \ell^2$; $f_m = f_9$; $f_a = f_4$; $f_b = f_5$;

is obtained by applying the (33):

$$a_1 = \frac{57 f_m - 52 f_a - 28 f_b}{384 (1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 \cdot 1.68 - 52 \cdot 1.07 - 28 \cdot 1.12}{384 (1.5 \cdot 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.069$$

$$a_2 = \frac{57 f_m - 52 f_b - 28 f_a}{384 (1.5 f_m - f_a - f_b)} = \frac{57 \cdot 1.68 - 52 \cdot 1.12 - 28 \cdot 1.07}{384 (1.5 \cdot 1.68 - 1.07 - 1.12)} = 0.059$$

$$m_1 = 0.0691 \cdot 350 \cdot 6 \cdot 3^2 = 960 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = 0.0597 \cdot 350 \cdot 6 \cdot 3^2 = 829 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

In the centre-line:

$$M = \frac{1}{8} p_l \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{1}{8} 350 \cdot 6 \cdot 3^2 - \frac{960 + 829}{2} = 842 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

Calculation of the theoretical deflection Applying (32) with one $\beta = 5$ we have

$$f_t = \frac{p_l \ell^4}{384 E J} [5 - 24 (a_1 + a_2)] = \frac{1.909}{384 E J} p_l \ell^4 = \frac{1.909 \cdot 3.5 \cdot 630^4}{384 \cdot 1.62 \cdot 10^{10}} = 1.692 \text{ mm}$$

showing $f_t = 1.692 \text{ mm}$ practically similar, but slightly higher than the trial one totalling $f_m = 1.68 \text{ mm}$

After unloading, the return of the deflectometers is sufficiently positive, denoting a proper floor elasticity and allowing the approval requested for the required load of 350 kg/m².

B.4 Example n. 10

Load test for approval of a mixed block floor with $H = 28 \text{ cm}$, with flexural stiffness referred to 1 linear meter of width of the floor $EJ = 3.2 \cdot 10^2 \text{ MPa} / \text{m}$ and with span length $\ell = 7 \text{ m}$.

Q = load on a central area with width $b = 1.5 \text{ m}$ and length $a = \frac{\ell}{2} = 3.5 \text{ m}$ fig. B19

The overall test load is $Q = 5250 \text{ daN}$, equal to $p = \frac{5250}{3.5} = 1500 \text{ daN/m}$ on a 1.5 m wide strip. At full

load, deflectometer readings in cm, are tab. B3:

Calcolo della freccia teorica. Applicando la (32) con $\beta = 5$ si ha

$$f_t = \frac{p_1 \ell^4}{384 E J} [5 - 24(a_1 + a_2)] = \frac{1.909}{384 E J} p_1 \ell^4 =$$

$$\frac{1.909 \cdot 3.5^4 \cdot 630^4}{384 \cdot 1.62 \cdot 10^{10}} = 1.692 \text{ mm}$$

da cui risulta $f_t = 1.692 \text{ mm}$ praticamente simile, ma lievemente superiore a quello di prova pari a $f_m = 1.68 \text{ mm}$

A scarico avvenuto, il ritorno dei flessimetri si mostra sufficientemente positivo, denotando una corretta elasticità del solaio e consentendone l'omologazione per il carico richiesto, pari a 350 kg/m^2 .

B.4 Esempio n. 10

Prova di carico per il collaudo di un solaio misto a blocchi con $H=28 \text{ cm}$, con rigidità flessionale riferita ad 1 ml di larghezza del solaio e con luce $\ell = 7 \text{ m}$.

Q = carico su un'area centrale di larghezza $b=1.5 \text{ m}$ e lunghezza $a = \frac{\ell}{2} = 3.5 \text{ m}$ fig. B19

Il carico di collaudo complessivo sia $Q = 5250 \text{ daN}$, pari a $p = \frac{5250}{3.5} = 1500$ su una striscia larga 1.5 m . A carico completo le letture, in cm , ai flessimetri risultano tab. B3:

Calcolo della ripartizione trasversale

$$\frac{A}{2} = \frac{0+0.01}{2} \cdot 2 + \frac{0.01+0.04}{2} \cdot 2 +$$

$$\frac{0.04+0.09}{2} \cdot 2 + \frac{0.09+0.16}{2} \cdot 2 = 0.44 \text{ mq}$$

$$A = 0.88 \text{ mq}$$

$$\text{per cui } q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = \frac{0.16 \cdot 1.5}{0.88} p = 0.2727$$

$$p = 0.2727 \times 1500 = 410 \text{ daN/m}$$

Il carico $q = 410 \text{ daN/m}$ agisce su una striscia larga 1.5 m .

La striscia di solaio verificabile

larga 1 m pertanto risulta caricata con $q_1 = \frac{410}{1.5} = 273 \text{ daN/m}$ per un tratto

centrale $\frac{\ell}{2} = 3.5 \text{ m}$.

Calcolo dei momenti flettenti

Si calcolano i momenti di estremità effettivi nella struttura reale m_1 ed m_2 tramite la lettura di f_a ed f_b ai

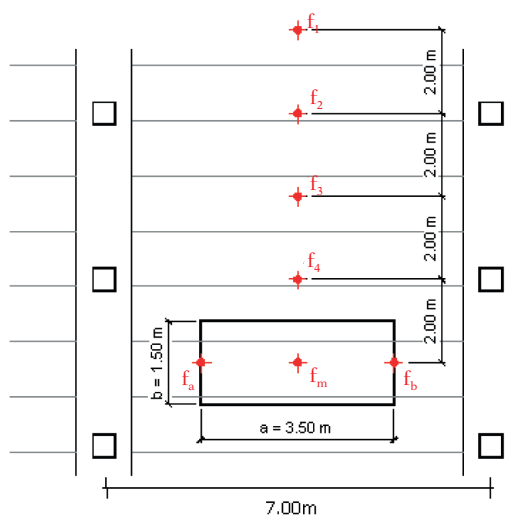


Fig. B19 - Posizionamento trasversale dei flessimetri. Transversal positioning of deflectometers.

TABELLA B3 - TABLE B3

LETTURE STRUMENTALI (cm)
INSTRUMENTAL READINGS (cm)

f_m	f_a	f_b	f_1	f_2	f_3	f_4
0.16	0.11	0.112	0	0.01	0.04	0.09

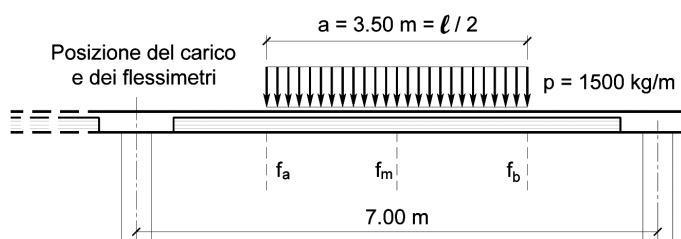


Fig. B20 - Schema di carico longitudinale. Longitudinal load diagram. (Posizione del carico e dei flessimetri: Load and deflectometers position).

Transverse distribution calculation

$$\frac{A}{2} = \frac{0+0.01}{2} \cdot 2 + \frac{0.01+0.04}{2} \cdot 2 + \frac{0.04+0.09}{2} \cdot 2 +$$

$$\frac{0.09+0.16}{2} \cdot 2 = 0.44 \text{ mq}$$

$$A = 0.88 \text{ mq}$$

$$\text{whereby } q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = \frac{0.16 \cdot 1.5}{0.88} p = 0.2727 p$$

$$p = 0.2727 \times 1500 = 410 \text{ daN/m}$$

quarti della luce ed f_m in mezzeria dove $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$

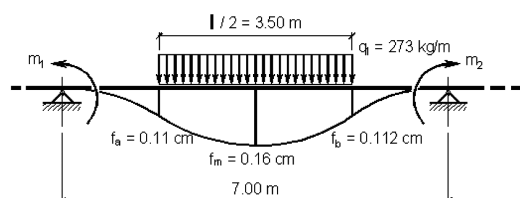


Fig. B21 - Valori numerici di calcolo. Numeric calculation values.

Applicando le (34) si ha:

$$a_1 = \frac{80f_m - 79f_a - 35f_b}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.11 - 35 \cdot 0.112}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.19}{13.824} \quad a_1 = 0.0137$$

$$a_2 = \frac{80f_m - 79f_b - 35f_a}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.112 - 35 \cdot 0.11}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.102}{13.824} \quad a_2 = 0.0074$$

Calcolo della freccia teorica

La freccia teorica risulta dalle (35):

$$f_t = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} \left[\frac{57}{16} - 24(a_1 + a_2) \right] = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} 3.0566$$

$$f_t = \frac{2.73 \cdot 700^4}{384 \cdot 3.2 \cdot 10^{10}} \cdot 3.0566 = 0.163 \text{ cm.}$$

Conclusioni

La freccia teorica massima, pari a 0.163 cm, risulta superiore a quella massima di prova misurata, che è pari a $f_m = 0.16$ cm ma molto simile.

I momenti flettenti di prova risultano:

$$M_m = \frac{q_1 \ell^2}{2} \left[\frac{3}{16} - a_1 - a_2 \right] = \frac{q_1 \ell^2}{2} 0.1664 = 1113 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_1 = 0.0137 \cdot 273 \cdot 7^2 = 183 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = 0.0074 \cdot 273 \cdot 7^2 = 100 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

Si calcola a quale carico p_j a m^2 esteso a tutto il solaio corrisponde il carico q_1 .

La freccia teorica dalla (35¹) risulta:

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[\frac{57}{16} q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right]$$

Load $q = 410 \text{ daN/m}$ acts on a 1.5 m wide strip.

The 1 m wide verifiable strip therefore is loaded with

$$q_1 = \frac{410}{1.5} = 273 \text{ daN/m} \text{ for a central section } \frac{\ell}{2} = 3.5 \text{ m.}$$

Calculation of bending moments

The actual end moments of the real structure m_1 and m_2 are calculated by reading f_a and f_b at quarters of the span and f_m in the centreline where $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$

Applying (34) we have:

$$a_1 = \frac{80f_m - 79f_a - 35f_b}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.11 - 35 \cdot 0.112}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.19}{13.824} \quad a_1 = 0.0137$$

$$a_2 = \frac{80f_m - 79f_b - 35f_a}{768(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{80 \cdot 0.16 - 79 \cdot 0.112 - 35 \cdot 0.11}{768(1.5 \cdot 0.16 - 0.11 - 0.112)} = \frac{0.102}{13.824} \quad a_2 = 0.0074$$

Calculation of the theoretical deflection

The theoretical deflection results from (35):

$$f_t = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} \left[\frac{57}{16} - 24(a_1 + a_2) \right] = \frac{q_1 \ell^4}{384EJ} 3.0566$$

$$f_t = \frac{2.73 \cdot 700^4}{384 \cdot 3.2 \cdot 10^{10}} \cdot 3.0566 = 0.163 \text{ cm.}$$

Conclusions

The maximum theoretical deflection of 0.163 cm, is higher than the maximum test one measured, which is equal to $f_m = 0.16$ cm but very similar.

The trial bending moments are:

$$M_m = \frac{q_1 \ell^2}{2} \left[\frac{3}{16} - a_1 - a_2 \right] = \frac{q_1 \ell^2}{2} 0.1664 = 1113 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_1 = 0.0137 \cdot 273 \cdot 7^2 = 183 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

$$m_2 = 0.0074 \cdot 273 \cdot 7^2 = 100 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

Calculation of the p_j load per m^2 across the entire floor corresponding to the q_1 load is carried out.

The theoretical deflection from (35¹) is:

$$f_t = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[\frac{57}{16} q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right]$$

La freccia per il carico uniformemente distribuito su tutta la striscia larga 1 m risulta dalla (32¹):

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5p_1\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \text{ da cui uguagliando si}$$

$$\text{ha: } \frac{57}{16}q_1 = 5p_1$$

$$p_1 = \frac{57}{16 \times 5}q_1 = 0.7125 \times 273 = 1.95 \text{ KPa.}$$

B.5 Esempio n. 11

Prova di carico su un solaio misto a blocchi con $H=28\text{cm}$, $EJ=3.2 \times 10^{10} \text{ MPa} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$ per una striscia di solaio larga 1 m ed $\ell=7\text{m}$.

Q carico agente su un'area centrale di larghezza $b=2\text{m}$ e lunghezza $a = \frac{\ell}{4} = 1.75\text{m}$ (figg. B22 e B23)

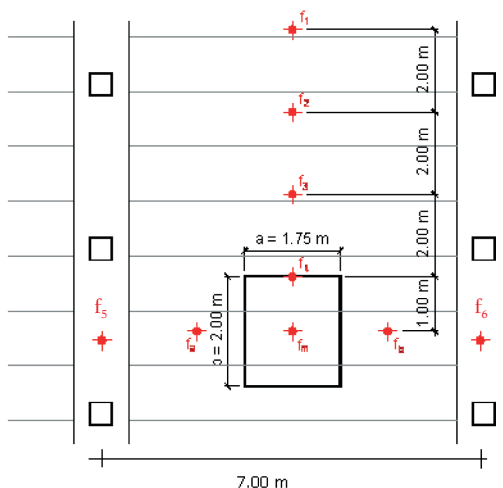


Fig. B22 - Posizione carico e flessimetri. Load and deflectometers position.

Sia il carico di collaudo compressivo $Q=6500 \text{ daN}$ pari a $p = \frac{6500}{1.75} = 3715 \text{ daN/m}$ su una striscia larga 2 m.

A carico completo le letture, in cm, dei flessimetri risultano:

TABELLA B4 - TABLE B4

LETTURE STRUMENTALI
INSTRUMENTAL READINGS

f_5	f_6	f_m	f_a	f_b	f_i	f_2	f_3	f_4
0.01	0.01	0.15	0.01	0.097	0	0.02	0.07	0.11

The deflection for the load uniformly distributed over the whole 1 m wide strip results from (32¹):

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} [5p_1\ell^2 - 24(m_1 + m_2)] \text{ from which equalising}$$

$$\text{we have: } \frac{57}{16}q_1 = 5p_1$$

$$p_1 = \frac{57}{16 \times 5}q_1 = 0.7125 \times 273 = 1.95 \text{ KPa.}$$

B.5 Example n. 11

Load test on a mixed block floor with $H = 28 \text{ cm}$, $EJ = 3.2 \times 10^{10} \text{ MPa} \cdot \text{cm}^2/\text{m}$ for a 1 m wide strip floor and $\ell = 7\text{m}$.

Q load acting on a central area with width of $b = 2 \text{ m}$ and length $a = \frac{\ell}{4} = 1.75\text{m}$ (figg. B22 and B23).

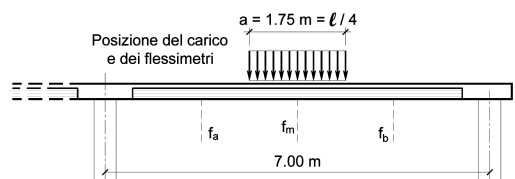


Fig. B23 - Posizione longitudinale carichi. Longitudinal position of loads. (Posizione del carico e dei flessimetri: Load and deflectometers position).

The overall test load $Q=6500 \text{ daN}$ is equal to $p = \frac{6500}{1.75} = 3715 \text{ daN/m}$ on a 2 m wide strip.

At full load, deflectometer readings in cm, are:

Transverse distribution calculation

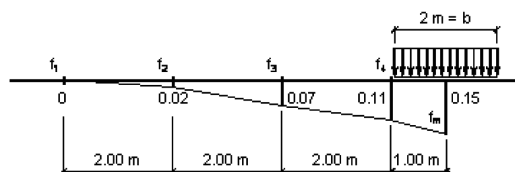


Fig. B24 - Letture spostamenti. Displacement readings.

Calculation of A:

$$\frac{A}{2} = \frac{0+0.02}{2} \times 2 + \frac{0.02+0.07}{2} \times 2 + \frac{0.07+0.11}{2} \times 2 + \frac{0.11+0.15}{2} \times 1 = 0.42$$

Gli appoggi sono praticamente rigidi.

Calcolo della ripartizione trasversale

Calcolo di A:

$$\frac{A}{2} = \frac{0 + 0.02}{2} * 2 + \frac{0.02 + 0.07}{2} * 2 + \frac{0.07 + 0.11}{2} * 2 + \frac{0.11 + 0.15}{2} * 1 = 0.42$$

$$A = 2 * 0.42 = 0.84 \quad q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = \frac{0.15 * 2}{0.84} q =$$

$$0.357 * 3715 = 1325 \text{ daN/m.}$$

Quindi la striscia di solaio larga 2 m caricata centralmente per un tratto $a = 1.75 \text{ m}$ è equivalente ad una striscia isolata caricata con un carico $q = 1325 \text{ daN/m}$.

La striscia di solaio da collaudare, larga 1 m, è caricata con una $q_1 = \frac{1325}{2} = 662 \text{ daN/m}$, per un tratto $a = 1.75 \text{ m}$.

Calcolo dei momenti flettenti

Attraverso la lettura di f_a ed f_b ai quarti della luce ed f_m in mezziera si calcolano: $m_1 = a_1 q_1 l^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 l^2$, effettivi della struttura reale.

Con le (36):

$$a_1 = \frac{688f_m - 267f_b - 727f_a}{12288(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{4.601}{344.064} = 0.01337 \quad (36)$$

$$m_1 = a_1 q_1 l^2 = 0.0173 * 662 * 7^2 = 434 \text{ kg} * \text{m} / \text{m};$$

$$a_2 = \frac{668f_m - 267f_a - 727f_b}{12288(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{5.981}{349.067} = 0.0173$$

$$m_2 = a_2 q_1 l^2 = 0.0173 * 662 * 7^2 = 561 \text{ daN} * \text{m} / \text{m}.$$

Calcolo della freccia teorica

La freccia teorica risulta applicando la (37):

$$f_t = \frac{q_1 l^4}{384EJ} \left[\frac{497}{256} - 24(a_1 + a_2) \right] = \frac{1.20326 * 6.62 * 700^4}{384 * 3.2 * 10^{10}} = 0.155 \text{ cm}$$

Conclusioni

La freccia massima teorica, determinata pari a $f_t = 0.155 \text{ cm}$, risulta superiore a quella massima di prova misurata, pari a $f_m = 0.15 \text{ cm}$.

Il momento flettente in mezziera di prova risulta essere:

The supports are therefore rigid.

$$A = 2 * 0.42 = 0.84 \quad q = \frac{f_m \cdot b}{A} p = \frac{0.15 * 2}{0.84} q =$$

$$0.357 * 3715 = 1325 \text{ daN/m.}$$

Therefore the 2 m wide floor strip loaded centrally for a section $a = 1.75 \text{ m}$ is equivalent to a secluded strip loaded with a load $q = 1325 \text{ daN/m}$.

The 1 m wide floor strip to approve is loaded with a $q_1 = \frac{1325}{2} = 662 \text{ daN/m}$ for a section $a = 1.75 \text{ m}$.

Calculation of bending moments

Through the reading of f_a and f_b at quarters of the span and f_m at the centreline the following are calculated: $m_1 = a_1 q_1 l^2$ ed $m_2 = a_2 q_1 l^2$, actual moments of the real structure.

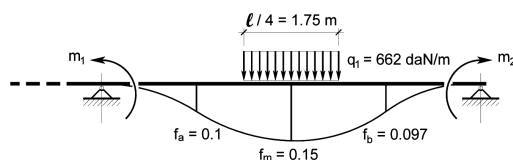


Fig. B25

With (36):

$$a_1 = \frac{688f_m - 267f_b - 727f_a}{12288(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{4.601}{344.064} = 0.01337 \quad (36)$$

$$m_1 = a_1 q_1 l^2 = 0.0173 * 662 * 7^2 = 434 \text{ kg} * \text{m} / \text{m};$$

$$a_2 = \frac{668f_m - 267f_a - 727f_b}{12288(1.5f_m - f_a - f_b)} = \frac{5.981}{349.067} = 0.0173$$

$$m_2 = a_2 q_1 l^2 = 0.0173 * 662 * 7^2 = 561 \text{ daN} * \text{m} / \text{m}.$$

Calculation of the theoretical deflection

The theoretical deflection results applying (37):

$$f_t = \frac{q_1 l^4}{384EJ} \left[\frac{497}{256} - 24(a_1 + a_2) \right] = \frac{1.20326 * 6.62 * 700^4}{384 * 3.2 * 10^{10}} = 0.155 \text{ cm}$$

Conclusions

The maximum theoretical deflection, given equal to $f_t = 0.155 \text{ cm}$, is greater than the maximum test one measured, equal to $f_m = 0.15 \text{ cm}$.

The test centreline bending moment is:

$$M_m = \frac{7}{128} q_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{q_1 l^2}{2} \left[\frac{7}{64} - a_1 + a_2 \right]$$

$$= \frac{q_1 l^2}{128} (5.0316)$$

$$M_m = \frac{662 \cdot 7^2 \cdot 5.0316}{128} = 1275 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

Il carico complessivo pari a $Q=6.500 \text{ daN}$ posato su un'impronta di $2 \times 1.75 \text{ m}$, ridotto per la ripartizione trasversale e rapportato alla striscia larga 1 m , diviene pari a $q_1=622 \text{ daN/m}$, per un tratto centrale di lunghezza.

$$1,75 \text{ m} = \frac{\ell}{4}$$

Si può calcolare a quale carico ripartito p_1 a m^2 ripartito su tutto il solaio tale carico q_1 corrisponde.

La freccia teorica risulta

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[\frac{497}{256} q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (37')$$

dove $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$;

a_1 ed a_2 sono stati calcolati con le (36)

Per il carico uniformemente distribuito su tutta la striscia larga $b=1 \text{ m}$, la freccia teorica risulta dalla (32')

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[5p_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (32')$$

Uguagliando la (37') e la (32') si ha:

$$\frac{497}{256} q_1 = 5p_1 \text{ da cui}$$

$$p_1 = \frac{497}{256 \cdot 5} = 0.3883 q_1 = 0.3883 \cdot 662 = 257 \text{ daN/m}$$

Quindi il carico complessivo di $Q = 6500 \text{ daN}$ su una striscia centrale larga $b = 2 \text{ m}$ e lunga $a = 1.75 \text{ m}$ equivale ad un carico distribuito sull'intero solaio pari a $p_{11} = 2.57 \text{ KPa}$

Più approssimativamente, uguagliando i momenti flettenti si ha

$$\frac{7}{128} q_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{1}{8} p_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \text{ da cui}$$

$$p_1 = \frac{56}{128} q_1 = \frac{56}{128} \cdot 662 = 289 \text{ daN/m}^2 \text{ ossia } 2.89 \text{ KPa}$$

con scarto di circa il 12%.

Considerazioni finali

Pur non presentandosi l'intero processo rigorosamente esatto, poiché a_1 e a_2 , che determinano m_1 ed m_2 con la (36), dovrebbero essere quelli ottenuti dal carico p uniforme su tutta la luce, e non quelli considerati ottenuti dal carico posto in zona centrale, misurati nella prova e riportati negli m_1 ed m_2 della (32') la variazione si appale-

$$M_m = \frac{7}{128} q_1 l^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{q_1 l^2}{2} \left[\frac{7}{64} - a_1 + a_2 \right]$$

$$= \frac{q_1 l^2}{128} (5.0316)$$

$$M_m = \frac{662 \cdot 7^2 \cdot 5.0316}{128} = 1275 \text{ daN} \cdot \text{m} / \text{m}$$

The total load equal to $Q = 6.500 \text{ daN}$ laid on an imprint of $2 \times 1.75 \text{ m}$, reduced due to the transverse distribution and related to the 1 m wide strip, becomes equal to $q_1 = 622 \text{ daN/m}$, for a central stretch of length.

$$1,75 \text{ m} = \frac{\ell}{4}$$

Calculation of the p_1 load per m^2 distributed across the entire floor corresponding to the q_1 load can be carried out.

The theoretical deflection is

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[\frac{497}{256} q_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (37')$$

where $m_1 = a_1 q_1 \ell^2$ $m_2 = a_2 q_1 \ell^2$;

a_1 and a_2 were calculated with (36)

For the load uniformly distributed across the whole strip wide $b = 1 \text{ m}$, the theoretical deflection results from (32')

$$f_i = \frac{\ell^2}{384EJ} \left[5p_1 \ell^2 - 24(m_1 + m_2) \right] \quad (32')$$

Equating eq. (37') and (32') results:

$$\frac{497}{256} q_1 = 5p_1 \text{ from which result}$$

$$p_1 = \frac{497}{256 \cdot 5} = 0.3883 q_1 = 0.3883 \cdot 662 = 257 \text{ daN/m}$$

Therefore the total load of $Q = 6500 \text{ daN}$ on a central strip wide $b = 2 \text{ m}$ and long $a = 1.75 \text{ m}$ is equivalent to a load distributed over the entire floor equal to $p_1 = 2.57 \text{ KPa}$

More roughly, by equating the bending moments we have

$$\frac{7}{128} q_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{1}{8} p_1 \ell^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \text{ from which}$$

$$p_1 = \frac{56}{128} q_1 = \frac{56}{128} \cdot 662 = 289 \text{ daN/m}^2 \text{ ossia } 2.89 \text{ KPa}$$

with a deviation of about 12%.

Final considerations

While the entire process is not strictly accurate, since a_1 and a_2 , that determine m_1 and m_2 with (36), should be those obtained from load p uniformly distributed across the whole span, and not those considered, obtained from the load placed in the central area, measured in the test and reported in m_1 and m_2 of (32'), the variation re-

sa modesta (inferiore al 3%), sicché i valori possono dirsi ampiamente accettabili nel complesso dell'analisi di tali prove di carico.

Il risultato ottenuto consente di sostenere che la prova di collaudo condotta secondo i sovra raffigurati criteri, con un carico parziale centrale pari a 6500 kg , è equivalente ad un carico distribuito su tutto il solaio pari a $p_f = 2.57\text{ KPa}$

Con un processo inverso si può stabilire il carico totale Q da assumere come riferimento per derivare un carico equivalente p_f richiesto per il collaudo dell'intero solaio.

Il progetto delle strutture ed in particolare dei solai a cui la presente nota si riferisce è condotto dal progettista attraverso il dimensionamento dei materiali previsti: dimensionamento delle travi, travetti ecc. in calcestruzzo, e dell'acciaio i cui tassi di lavoro non devono superare i limiti legislativi anche in funzione delle scelte e prescrizioni progettuali previste.

Quindi sono la determinazione delle sollecitazioni dei momenti flettenti, dei tagli, e degli sforzi normali ad essere calcolati da cui derivano i dimensionamenti.

La freccia teorica è in genere conseguente a tale dimensionamento e deve essere compatibile prevalentemente con le sovrastrutture: pavimenti, tramezzi, impianti ecc.

A costruzione avvenuta, il collaudo statico si prefigge di controllare se la struttura è idonea a sopportare i carichi per i quali è stata progettata.

A costruzione terminata molti sono gli elementi incerti conseguenti la realizzazione quali i getti, la loro successione, la maturazione nelle condizioni climatiche presenti, le riprese di getto ecc.

Inoltre le armature oramai inaccessibili non permettono più di controllare il loro numero e la corretta posa rispetto alle prescrizioni progettuali.

Quindi lo stato di sollecitazione nei materiali non è pressoché controllabile.

Così sotto carico è il comportamento deformativo specie con il controllo dell'elasticità a determinarne l'idoneità.

Il comportamento elastico con il ritorno a scarico avvenuto o meglio con carichi ciclici quando è possibile, accerta che i materiali sono in regime elastico quindi nei limiti prescritti dalle leggi.

Se il carico di collaudo è parziale sul solaio o anche concentrato con martinetti idraulici, come spesso avviene per ovvi motivi pratici, attraverso la procedura qui presentata è possibile risalire al carico uniforme su tutto il solaio uguagliando le frecce teoriche ottenute dal carico parziale di collaudo con quelle teoriche dovute al carico uniformemente distribuito.

È un confronto fra elementi omologhi.

La freccia teorica del carico parziale del collaudo (in questo caso pari a 0.155 superiore a quello di collaudo 0.15) è confrontata con la freccia teorica del carico su tutto il solaio, da cui si ricava tale carico da confrontare

vealed is only modest (less than 3%), so values may be widely acceptable in the overall analysis of these load tests.

The result obtained can argue that the test conducted in accordance with the above criteria, with a partial central load of 6500 kg , is equivalent to a load distributed over the entire floor equal to $p_f = 2.57\text{ KPa}$

With a reverse process the total load Q can be determined to be taken as reference for deriving an equivalent load p_f required for the approval of the entire floor.

The project and, in particular the floor structures to which this note applies, is conducted by the designer through the sizing of planned materials: design of beams, joists, etc. in concrete, and of steel whose work rates must not exceed legislative limits also depending on choices and design requirements.

Therefore the determination of bending moments, shearings, and normal stresses are to be calculated, from which dimensioning arises.

The theoretical deflection is typically due to this sizing and must be compatible preponderantly with the superstructures: floors, partitions, systems etc.

Once constructed, the static test intends checking whether the structure is capable of withstanding the loads for which it was designed.

Upon completion of the construction, there are many uncertain elements resulting from the realisation of castings, their sequence, the maturation of existing climatic conditions, resumption of casting etc.

Moreover, the reinforcements now inaccessible do not allow checking their number and the correct laying in relation to the design provisions.

Therefore the stress status in materials is fairly uncontrollable.

This way, it is the strain behaviour under load, especially with the control of flexibility, that determines suitability.

Elastic behaviour with the unloading in place or better with cyclic loads when possible, ensures that the materials are in elastic condition therefore within the limits prescribed by law.

If the test load on the floor is partial or even concentrated with hydraulic jacks, as is often the case for obvious practical reasons, the uniform load across the whole floor can be traced back through the procedure explained here by equating the theoretical deflections derived from partial load testing with theoretical ones due to the uniformly distributed load.

It is a comparison between similar elements.

The theoretical deflection of the partial test load (in this case equal to 0.155 higher than the test one 0.15) is compared with the theoretical deflection of the load across the entire floor, from which the load to be com-

con il carico di progetto. Oppure inversamente: in base al comportamento della struttura caricarla in prova con carico tale da equivalere al carico di progetto.

Pur tuttavia "ad majora" uguagliando i momenti flettenti, tenendo sempre conto dei momenti d'incastro determinati dalla prova deformativa, si ha un riscontro del carico uniformemente distribuito con evidentemente uno scarto rispetto al valore ottenuto con l'uguaglianza delle frecce, scarto per altro accettabile.

Tale valore come detto fa riferimento più propriamente ai calcoli ed ipotesi di progetto che come detto sono impostati sulle tensioni e non sulle deformazioni.

pared with the project load is obtained. Or inversely: based on the behaviour of the structure, test load it with a load so as to equate the project load.

Nevertheless, equating the bending moments "ad majora", always taking into account the fixing moments determined by the deformation test, there is a feedback of the uniformly distributed load with evidently a deviation from the value obtained with the equality of deflections, a more than acceptable deviation.

As mentioned, this value refers more properly to the project calculations and assumptions that, as said, are set on the strains and not on the deformations.

C. CARICO CONCENTRATO SU MENSOLA

C. Esempio n. 12

Sia una soletta-balcone a mensola

Calcolo della freccia teorica precedente la prova di carico

Sia da collaudare un balcone indicato in figg. C26 e C25.

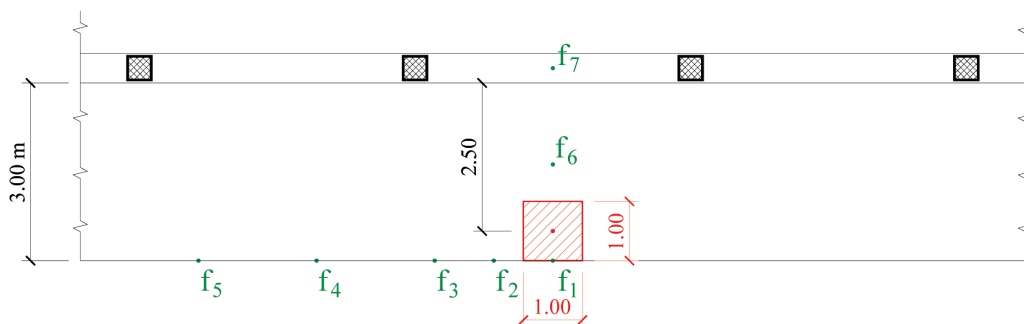


Fig. C25

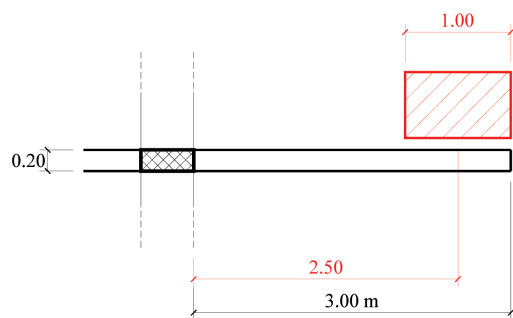


Fig. C26

This balcony is designed and dimensioned for a useful overload of $400 \text{ daN/m}^2 = 4 \text{ KPa}$

Testing should perform a bending moment stress of

$$M = \frac{1}{8} q \ell^2 = \frac{1}{8} 400 \times 3^2 = 1800 \text{ daN} \cdot \text{m/m}$$

The use of a load concentrated on the end of the cantilever is decided.

Such equivalent load distributed over the edge of the balcony with a width of 1 m has a value of $M = p \times \ell$

$$p = \frac{M}{\ell} = \frac{1800}{2,5} = 720 \text{ daN/m} \cdot \text{Such concentrated load}$$

Tale balcone è progettato e dimensionato per un sovraccarico utile pari a pari a $400 \frac{daN}{m^2} = 4 \text{ KPa}$

Il collaudo dovrà realizzare una sollecitazione di momento flettente pari a

$$M = \frac{1}{8} q \ell^2 = \frac{1}{8} 400 \times 3^2 = 1800 \frac{daN \cdot m}{m}$$

Si stabilisce di utilizzare un carico concentrato sull'estremità dello sbalzo.

Tale carico equivalente distribuito su tutto il bordo del balcone di larghezza pari a 1m vale $M = p \times \ell$

$p = \frac{M}{\ell} = \frac{1800}{2,5} = 720 \frac{daN}{m}$. Tale carico concentrato realizza lo stesso momento flettente del carico distribuito $q = 4 \text{ KPa}$.

Misurando con uno sclerometro il modulo elastico E, e confrontandolo con i dati ufficiali di laboratorio per un controllo, si ottiene $E = 30.000 \text{ MPa}$.

Il momento d'inerzia per una striscia di solaio larga 1m risulta

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66.666 \text{ cm}^4$$

La rigidezza risulta quindi $EJ = 2 \times 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$ per una striscia di 1m.

La freccia teorica di progetto quindi risulta

$$f_t = \frac{1}{3} \frac{p \ell^3}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{720 \times 250^3}{2 \times 10^{10}} = 187 \text{ centesimi di mm.}$$

Tale valore è stato calcolato presupponendo la mensola perfettamente incastrata e senza cedimento del vincolo e dovrà essere confrontato con quello ottenuto dalla prova di collaudo.

Il Collaudo

Si stabilisce di applicare un carico concentrato P su un'impronta di 1m x 1m (figg. C27 e C26).

Per tener conto della ripartizione trasversale tale carico concentrato dovrà essere aumentato di un coefficiente K_t da definire con opportune misurazioni.

Calcolo del coefficiente di distribuzione trasversale K_t

Come illustrato in fig. C25 si pongono 7 comparatori centesimali.

Si pone un carico esplorativo pari a $P_1 = 1.000 \text{ daN}$ e si procede alle letture. Esse sono in centesimi di mm

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
90	60	20	5	1	30	1

achieves the same bending moment of the distributed load $q = 4 \text{ KPa}$.

Measuring the E elastic module with a Schmidt hammer, and comparing it with the official laboratory tests for a check, we have $E = 30.000 \text{ MPa}$.

The moment of inertia for a 1 m wide floor strip is

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66.666 \text{ cm}^4$$

The stiffness is therefore $EJ = 2 \times 10^{10} \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$ for a 1 m strip.

The theoretical project deflection is therefore

$$f_t = \frac{1}{3} \frac{p \ell^3}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{720 \times 250^3}{2 \times 10^{10}} = 187 \text{ hundredths of millimeters.}$$

This amount was calculated assuming the bracket perfectly fixed and without constraint yielding and must be compared with that obtained from the testing.

The Trial

Application of a P concentrated load is established on an imprint of 1m x 1m (figg. C27 and C26).

In order to take account of the transverse distribution, such concentrated load should be increased by a K_t coefficient to be defined with appropriate measurements

Calculation of K_t transverse distribution coefficient

As shown in fig. C25 there are 7 centesimal comparators.

There is an exploratory load equal to $P_1 = 1.000 \text{ daN}$ and readings are carried out. They are in hundredths of millimeters.

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
90	60	20	5	1	30	1

The readings at the edge of the balcony are shown in fig. 26 and the area is calculated.

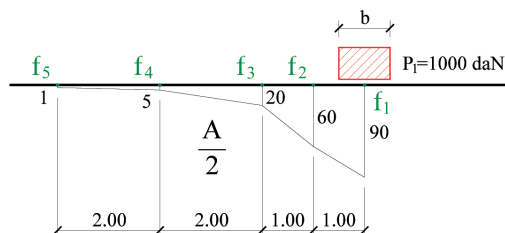


Fig. C27

Le letture al bordo del balcone sono riportate in fig. 26 e si calcola l'area.

$$\frac{A}{2} = \frac{1+5}{2} \times 2 + \frac{5+20}{2} \times 2 + \frac{20-60}{2} \times 1 + \frac{60-90}{2} \times 1 = 146$$

$$A = 292$$

Con la nota formula

$$p = \frac{f_1 \times b}{A} Q = \frac{90 \times 1}{292} Q = 0.308 Q \quad K_1 = 0.308 \quad (41)$$

Quindi invece di applicare un carico $p=720\text{daN}$ su tutto il bordo dello sbalzo si applica un carico Q concentrato su $1\text{m} \times 1\text{m}$ pari a

$$Q = \frac{p}{0.308} = \frac{720}{0.308} = 2340\text{daN} \quad \text{carico equivalente a } p \text{ e che equivale al carico.}$$

Prova di carico di collaudo

Si inizia a posare il carico a step successivi per controllare il buon andamento degli spostamenti.

Per altro con la prima prova di carico di $P_1=1.000\text{daN}$ per la determinazione del K_1 si è già potuto verificare l'elasticità del balcone.

Con il raggiungimento del massimo carico $Q = 2340\text{daN}$ si leggono i seguenti abbassamenti trasversali $f_1 = 225$; $f_6 = 83$; $f_7 = 5$ (centesimi di mm).

Con riferimento alla fig. C28 $f_1 = f_7 + b + f_A$ dove

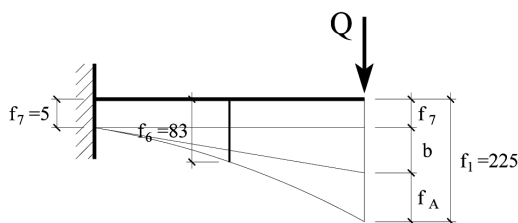


Fig. C28

f_7 = abbassamento dell'appoggio da considerarsi come una traslazione rigida e costante;

b = abbassamento dovuto alla rotazione rigida dell'appoggio;

f_A = freccia elastica della deformazione del solaio da determinare e confrontare con la freccia teorica calcolata al punto 3.1.

In primo luogo si depurano f_1 ed f_6 dalla traslazione (fig. C29).

$$\frac{A}{2} = \frac{1+5}{2} \times 2 + \frac{5+20}{2} \times 2 + \frac{20-60}{2} \times 1 + \frac{60-90}{2} \times 1 = 146$$

$$A = 292$$

With the familiar formula

$$p = \frac{f_1 \times b}{A} Q = \frac{90 \times 1}{292} Q = 0.308 Q \quad K_1 = 0.308 \quad (41)$$

So, instead of applying a load $p = 720\text{daN}$ on the whole edge of the cantilever, a Q load is applied concentrated on $1\text{m} \times 1\text{m}$ equal to

$$Q = \frac{p}{0.308} = \frac{720}{0.308} = 2340\text{daN} \quad \text{load equivalent to } p \text{ and that is equivalent to the load.}$$

Trail loading test

Laying of the load in subsequent steps is begun to control the good progress of the displacements.

Moreover, with the first load test of $P_1 = 1.000\text{daN}$ for the determination of K_1 , the elasticity of the balcony has already been verified.

With the achievement of maximum load $Q = 2340\text{daN}$, the following transverse yieldings can be read $f_1 = 225$; $f_6 = 83$; $f_7 = 5$ (hundredths of mm).

Referring to fig. C28 $f_1 = f_7 + b + f_A$ where

f_7 = reduction of support to be considered as a rigid and constant motion

b = reduction due to the rigid rotation of the support

f_A = elastic deflection of the floor deformation to be determined and compared with the theoretical deflection calculated in point 3.1.

First of all f_1 and f_6 are purified of the translation (fig. C29)

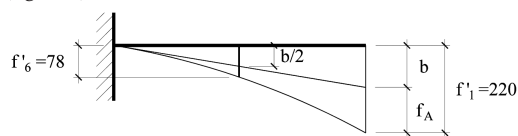


Fig. C29

$$f'_1 = f_1 - f_7 = 225 - 5 = 220$$

$$f'_6 = f_6 - f_7 = 83 - 5 = 78$$

From the theory (39) we have

$$f_A = \frac{8}{3} (f'_1 - 2f'_6) = \frac{8}{3} (220 - 2 \times 78) = 170.7 \text{ hundredths.}$$

A very similar value to the theoretical deflection equal to 187 hundredths and less than the same.

$$f_1' = f_1 - f_7 = 225 - 5 = 220$$

$$f_6' = f_6 - f_7 = 83 - 5 = 78$$

Dalla teoria (39) si ha

$$f_A = \frac{8}{3}(f_1' - 2f_6') = \frac{8}{3}(220 - 2 \times 78) = 170.7 \text{ centesimi.}$$

Valore molto simile alla freccia teorica pari a 187 centesimi ed inferiore ad essa.

Considerazioni

- Se le letture fossero state $f_1 = 216$; $f_6 = 71$; $f_7 = 5$ ossia $f_1 = 211$ ed $f_6 = 66$ non ci sarebbe stato praticamente rotazione ossia se

$$f_6' = \frac{5}{16} f_1' \text{ non si ha rotazione.}$$

- Il coefficiente di ripartizione trasversale rappresenta l'equivalente di una distribuzione del carico su una sezione di balcone all'incastro pari a $b=3,25\text{m}$ con una distribuzione a 70° circa considerazione ragionevole che dimostra la validità della formula energetica (41).

Considerations

- If the readings had been $f_1 = 216$; $f_6 = 71$; $f_7 = 5$ that is $f_1 = 211$ ed $f_6 = 66$ there would practically be no rotation i.e.

if $f_6' = \frac{5}{16} f_1'$ there is no rotation.

- The transverse distribution coefficient is the equivalent of a load distribution on a section of the balcony at the fixing equal to $b = 3.25 \text{ m}$ with a distribution of 70° approximately, a reasonable consideration that proves the validity of the energy formula (41).

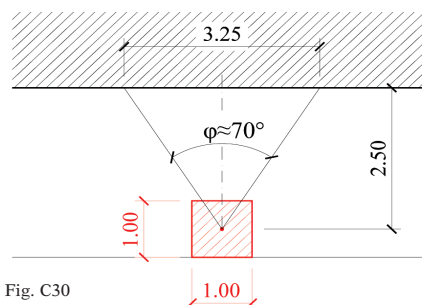


Fig. C30

$$\frac{Q}{\ell_1} = \frac{2340}{3,25} = 720 \text{ daN/m} = p$$

$$\frac{Q}{\ell_1} = \frac{2340}{3,25} = 720 \text{ daN/m} = p$$

Sommaire

LES TESTS DE CHARGE DES DALLES. CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES ET PROPOSITIONS OPÉRATIONNELLE

Cet article propose la description d'une petite procédure simplifiée à appliquer dans les tests de charge sur des structures horizontales, à l'aide d'une exposition théorique pour la détermination des coefficients de contrainte sur la structure réelle, ainsi pour des charges distribuées que concentrées.

Cet article présente en outre des exemples pratiques avec fonction explicative pour plusieurs cas de figure.

Zusammenfassung

BELASTUNGSPROBEN VON PLATTEN. THEORETISCHE BE-TRACHTUNGEN UND PRAKTISCHEN VORSCHLÄGE

Beschreibung eines vereinfachten Verfahrens das anwendbar in den Belastungsproben von waagerechten Strukturen ist. Theoretischen Grundlagen des Verfahrens.

Bestimmung von Zwangskoeffizienten der Strukturen im Fall von verteilten oder konzentrierten Lasten. Vorstellung von praktischen Beispielen die mehrere Fälle erfasste.