



## Valutazione delle conduttanze delle rotaie

### *Evaluation of rail conductances*

Dott. Giovanni LUCCA<sup>(\*)</sup>

**Sommario** - In questo articolo viene illustrato uno studio delle conduttanze, sia verso terra che mutue, relative alle rotaie di una linea ferroviaria a singolo e a doppio binario; tale studio viene effettuato mediante il metodo degli elementi al contorno (Boundary Element Method). In particolare, viene presentata una analisi di sensibilità delle grandezze sopra menzionate al variare dei principali parametri in gioco cioè conducibilità delle traversine, del ballast e del terreno.

#### 1. Introduzione

Nei progetti riguardanti la valutazione delle interferenze elettromagnetiche prodotte da linee ferroviarie (sia in corrente alternata che continua) su strutture metalliche (quali gasdotti, oleodotti, cavi di telecomunicazione) e/o l'impatto delle correnti vaganti disperse dai binari sulle medesime strutture, parametri di fondamentale importanza sono le conduttanze verso terra e le conduttanze mutue delle rotaie.

Anche per quanto riguarda la valutazione delle tensioni di binario, le conduttanze delle rotaie assumono un ruolo molto importante.

Ricordiamo che tutte queste valutazioni sono finalizzate a garantire la sicurezza elettrica per persone ed impianti (si vedano le norme CEI EN 50443, CEI 103-10, CEI EN 50122-1) nonché a stimare il rischio di corrosione legato alle correnti vaganti (norma CEI EN 50162, CEI EN 50122-2).

Inoltre, le conduttanze delle rotaie rivestono importanza anche nel campo del segnalamento ferroviario in quanto influenzano direttamente la prestazione dei circuiti di binario (se presenti).

È noto che la linea ferroviaria nel suo complesso (conduttori di alimentazione, di protezione e rotaie) può essere efficacemente simulata mediante il modello di linea multiconduttore [1-3] il quale richiede la conoscenza delle conduttanze per unità di lunghezza (p.u.l.) delle rotaie che sono, per l'appunto, oggetto di questo articolo.

In altre parole, le conduttanze p.u.l. (o, più precisamente, come verrà precisato al par. 2.1, i coefficienti di conduttanza p.u.l.) sono dati di ingresso fondamentali per il modello multiconduttore che rappresenta la linea

**Summary** - In this paper a study relevant to the rail conductances, self and mutual, for both single and double railway lines track is presented; such a study is performed by means of Boundary Element Method. In particular, a sensitivity analysis of the above mentioned quantities is presented by varying the main parameters involved i.e.: sleepers, ballast and soil conductivity.

#### 1. Introduction

In projects concerning the evaluation of electromagnetic interference produced by railway lines (both AC and DC) on metallic structures (such as pipelines, telecommunication cables) and/or the impact of stray currents leaked from the tracks on the same structures, parameters of fundamental importance are the conductances to ground and the mutual conductances among the rails.

Rail conductances play a very important role also when rail voltage evaluation is concerned.

We recall that all these assessments are aimed at ensuring the electrical safety of people and installations (see CEI EN 50443, CEI 103-10, IEC EN 50122-1 standards) and to estimate the risk of corrosion related to stray currents (CEI EN 50162, CEI EN 50122-2 standards). In addition, rail conductances are important also when dealing with signalling as they directly affect the performance of track circuits (if present).

It is well known that the railway line as a whole (feeding and protection conductors together rails) can be effectively simulated by means of the multi-conductor line model [1-3] which requires knowledge of the per unit length (p.u.l.) rail conductances that are, just the subject of this paper.

In other words, the p.u.l. conductances (or, more precisely, as outlined in section 2.1, the coefficients of conductance) are key input data for the multiconductor model representing the traction line as they have a decisive influence on the distribution of voltages and currents along the traction line itself. In turn, the distribution of such voltages and currents, present on the traction line, greatly affects the electromagnetic interference level generated on other structures such as telecommunication cables, metal pipes, etc. Then, a reliable estimation of p.u.l. rail conductances is of

<sup>(\*)</sup> SIRTI S.p.A. - Milano.

<sup>(\*)</sup> SIRTI S.p.A. - Milano.

di trazione poiché influenzano in maniera decisiva la distribuzione di tensioni e correnti lungo la linea di trazione stessa. A sua volta, la distribuzione di tali tensioni e correnti presenti sulla linea di trazione influenza notevolmente anche sul livello di interferenza elettromagnetica generata su altre strutture quali cavi di telecomunicazione, tubazioni metalliche ecc. Quindi, una stima affidabile delle conduttanze p.u.l. delle rotaie risulta di grande importanza per una corretta valutazione dei possibili effetti su strutture interferite da linee ferroviarie.

A differenza di altri parametri elettrici che sono esprimibili, pur con differenti gradi di approssimazione, in forma analitica mediante opportune formule, le conduttanze delle rotaie non hanno purtroppo questa peculiarità per cui è necessario fare ricorso a metodi numerici.

Ai fini della valutazione numerica delle conduttanze, in letteratura si possono trovare articoli che si basano sul metodo degli elementi finiti (FEM) [4-5] mentre, più recentemente, è stato proposto un approccio alternativo [6], basato sul metodo degli elementi al contorno (BEM), sul quale è fondato il nostro lavoro. Il metodo è descritto a grandi linee nell'Appendice A e si rimanda direttamente a [6] per un approfondimento.

Mentre la pubblicazione [6] è focalizzata alla descrizione dell'algoritmo di calcolo e alla sua validazione mediante confronto con altri metodi di calcolo e misure in campo, in questo articolo ci focalizzeremo, invece, sulla presentazione di alcuni risultati riguardanti la valutazione delle conduttanze delle rotaie nei casi di singolo e doppio binario in funzione dei parametri più significativi che entrano in gioco nel modello di calcolo.

I risultati presentati in questo articolo sono ottenuti mediante analisi in corrente continua e quindi si applicano direttamente alle linee ferroviarie con questo tipo di alimentazione; tuttavia, essi possono essere estesi anche alle ferrovie alimentate in corrente alternata (cioè 16.67Hz, 50Hz e 60Hz) in quanto, alle tipiche frequenze di alimentazione della trazione, i valori conduttanze delle rotaie sono pressoché identici a quelli a 0Hz [7-8].

## 2. Ipotesi ed assunzioni fondamentali

### 2.1. Modello di linea di trasmissione

La prima ipotesi fondamentale è basata sull'adozione del modello di linea di trasmissione per le rotaie che vengono trattate come conduttori paralleli, infinitamente lunghi e accoppiati condutivamente<sup>(1)</sup> attraverso le traversine, il ballast ed il terreno.

<sup>(1)</sup> Nel caso di linee ferroviarie alimentate in corrente alternata, i circuiti rotaia-terra sono accoppiati anche induttivamente, ma questo non influenza affatto sulla valutazione delle conduttanze in quanto, alle basse frequenze, gli accoppiamenti induttivo e conduttivo possono essere studiati separatamente. In linea teorica le rotaie sono accoppiate anche capacitivamente, ma, alle frequenze considerate, tale effetto può, con buona approssimazione essere trascurato.

*great importance for a correct assessment of the possible effects on structures interfered by railway lines.*

*Unlike other electrical parameters that can be expressed, although with different approximation levels, in analytical form by suitable formulas, rail conductances do not have, unfortunately, this peculiarity so that numerical methods need to be employed.*

*In order to numerically evaluate rail conductances, some papers, based on the finite element method (FEM) [4-5] can be found in literature; more recently an alternative approach [6], based on Boundary Element Method (BEM), and on which our work is grounded, has been proposed. The method is outlined in Appendix A and one can refer directly to [6] for more insight.*

*While publication [6] is focused on describing the calculation algorithm and its validation by comparing it with other calculation methods and with field measurements, here we will focus on presenting some results concerning the evaluation of the rails conductances for single and double track cases versus the most significant parameters involved in the calculation model. The results presented in this paper are obtained by DC analysis and therefore directly applied to railway lines with this type of power supply; however, they can also be extended to AC (i.e. 16.67Hz, 50Hz and 60Hz) railway lines, since, at the typical traction frequencies, rail conductances values are almost identical to those at 0Hz [7-8].*

## 2. Main hypotheses and assumptions

### 2.1. Transmission line model

*The first fundamental hypothesis is based on the adoption of the transmission line model for rails that are treated as parallel, infinitely long conductors and conductively<sup>(1)</sup> coupled through sleepers, ballast and ground.*

*By assuming the transmission line model, one also implicitly assumes a two-dimensional model for the group of conductors considered.*

*So, if  $z$  is the progressive along the rails and  $N$  the number<sup>(2)</sup> of rails, the equations relating the p.u.l. leakage currents from the rails ( $-dI_i/dz$ ) with rails potentials  $V_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) can be expressed in compact form as:*

<sup>(1)</sup> *In the case of AC railway lines, rail-to-ground circuits are also inductively coupled, but this does not affect the conductances evaluation at all, because, at low frequencies, inductive and conductive couplings can be separately studied. From the theoretical point of view, rails are also capacitively coupled, but, at the frequencies considered, such an effect can be neglected with good approximation.*

<sup>(2)</sup> *For simplicity, in this work we suppose that the only conductors present and interacting through conductive coupling are the rails; therefore, we do not consider the case where, in addition to the rails, there are conductors in direct contact with the ground (e.g. linear electrodes). However, BEM method is still able to deal with this more general case.*

Assumendo il modello di linea di trasmissione, si assume implicitamente un modello di tipo bidimensionale per il gruppo di conduttori considerati.

Pertanto, detta  $z$  la progressiva longitudinale lungo le rotaie, e detto  $N$  il numero di rotaie considerate<sup>(2)</sup>, le equazioni che legano le correnti uscenti p.u.l. dalle rotaie ( $-dI_i/dz$ ) ai potenziali  $V_i$  delle rotaie stesse ( $i=1,2,\dots,N$ ) possono essere espresse in forma compatta come:

$$-\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dz} \\ \frac{dI_2}{dz} \\ \vdots \\ \frac{dI_N}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

Nella (1), la matrice quadrata  $[g]$  di ordine  $N \times N$  rappresenta i *coefficienti di conduttanza p.u.l.*; essi non hanno un significato fisico diretto, ma sono legati alle *conduttanze p.u.l.* mediante le seguenti relazioni [9]:

$$G_{k0} = \sum_{j=1}^N g_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2a)$$

$$G_{kj} = -g_{kj} \quad k, j = 1, 2, \dots, N \quad k \neq j \quad (2b)$$

Nella (2a),  $G_{k0}$  rappresenta la conduttanza p.u.l. della rotaia  $k$ -esima verso terra (lontana) mentre, nella (2b),  $G_{kj}$  rappresenta la conduttanza mutua p.u.l. tra la rotaia  $k$ -esima e quella  $j$ -esima.

A differenza dei coefficienti di conduttanza, le conduttanze hanno un significato fisico diretto e, come tali, possono essere misurate; in particolare, le conduttanze verso terra sono in relazione alle correnti disperse nel suolo, mentre le conduttanze mutue sono in relazione alle correnti scambiate tra una rotaia e l'altra.

Il metodo di calcolo basato sulla tecnica BEM, da noi utilizzato, consente dapprima la determinazione della matrice dei coefficienti di conduttanza p.u.l.  $[g]$  e quindi, mediante le (2a) e (2b), la determinazione delle conduttanze p.u.l.

## 2.2. Semplificazione nella geometria del binario

La seconda ipotesi fondamentale riguarda la semplificazione della geometria del binario che è illustrata nelle fig. 1a e 1b. Per semplicità, si è considerata una linea a singolo binario, ma è immediata l'estensione al caso di una linea a doppio binario.

Tale semplificazione della geometria si rende necessaria per potere applicare il metodo delle immagini che è

$$-\begin{bmatrix} \frac{dI_1}{dz} \\ \frac{dI_2}{dz} \\ \vdots \\ \frac{dI_N}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

In (1), la matrice  $[g]$  di  $N \times N$  ordine rappresenta i p.u.l. coefficienti di conduttanza; essi non hanno un significato fisico diretto, ma sono legati alle p.u.l. conduttanze mediante le seguenti relazioni:

$$G_{k0} = \sum_{j=1}^N g_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2a)$$

$$G_{kj} = -g_{kj} \quad k, j = 1, 2, \dots, N \quad k \neq j \quad (2b)$$

In (2a),  $G_{k0}$  rappresenta la p.u.l. conduttanza della  $k$ -esima rotaia rispetto al (remote) suolo, mentre in (2b)  $G_{kj}$  rappresenta la p.u.l. conduttanza mutua tra la  $k$ -esima e la  $j$ -esima rotaia.

Unlike coefficients of conductance, conductances have a direct physical meaning and, as such, can be measured; in particular, conductances to ground are related to currents leaked in the soil, while mutual conductances are related to currents exchanged between one rail and another.

The calculation method based on BEM technique, that we used, first allows for the determination of the p.u.l. coefficients of conductance matrix  $[g]$  and then, by means of (2a) and (2b), the assessment of the p.u.l. conductances.

## 2.2. Track geometry simplification

The second fundamental assumption deals with the track geometry simplification which is shown in figs. 1a and 1b. For simplicity, we have considered a single track line, but the extension to a double track line is straightforward.

Such a track geometry simplification is needed in order to apply the Images Method on which the calculation algorithm described in [6] and outlined in Appendix A is grounded.

In fig. 1a the main elements relevant to the track sketch are shown i.e.: rails, sleeper, ballast and soil (supposed homogeneous) while in fig. 1b the equivalent geometric representation used in the calculation method is shown. In particular we remark that:

- the rails are represented by two equivalent semi-cylindrical conductors having radius given by:

$$r_{eq} = \frac{L_r}{\pi} \quad (3)$$

where  $L_r$  is the width of the rail foot (that is the portion of rail surface in direct contact with the sleeper). Thus, (3) implies that the contact area between the equivalent semi-cylinder and sleeper is equal to the one between real rail and sleeper.

<sup>(2)</sup> Per semplicità, in questo lavoro supponiamo che gli unici conduttori presenti, ed interagenti mediante accoppiamento conduttivo, siano le rotaie; non consideriamo pertanto il caso in cui oltre alle rotaie vi siano conduttori a diretto contatto con il terreno (ad esempio dispersori lineari). Il metodo BEM è comunque in grado di considerare anche questo caso più generale.

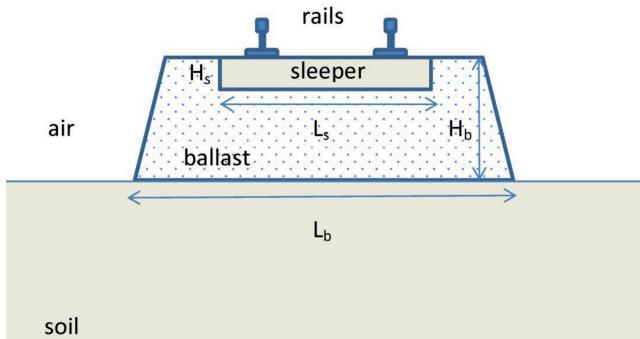


Fig. 1a - Schematizzazione della geometria reale di un binario.  
Fig. 1a - Real track sketch.

alla base dell'algoritmo di calcolo descritto in [6] e, a grandi linee, in Appendice A.

Nella fig. 1a sono rappresentati gli elementi essenziali della schematizzazione del binario cioè: rotaie, traversine, ballast e terreno (supposto omogeneo) mentre nella fig. 1b è mostrata la rappresentazione geometrica equivalente utilizzata nel modello di calcolo. In particolare, osserviamo che:

- le rotaie sono rappresentate da due conduttori semi-cilindrici equivalenti il cui raggio è dato da:

$$r_{eq} = \frac{L_r}{\pi} \quad (3)$$

dove  $L_r$  è la larghezza della suola della rotaia (cioè la parte di rotaia direttamente in contatto con la traversina). Quindi la (3) fa sì che l'area di contatto tra semi-cilindro equivalente e traversina sia la stessa tra rotaia reale e traversina;

- lo strato di ballast è rappresentato da un rettangolo equivalente, immerso nel terreno, di altezza  $H_b$  e larghezza equivalente  $L_{beq}$  tale che la lunghezza di quella parte di contorno del rettangolo che è a contatto con il terreno sia pari alla base maggiore del trapezio rappresentato in fig. 1a cioè:

$$L_{beq} = L_b - 2H_b \quad (4)$$

la (4) fa sì che l'area di contatto tra ballast equivalente e suolo sia la stessa tra ballast reale e suolo.

A giustificazione delle formule (3) e (4), conviene ricordare che le conduttanze sono legate non solo alle proprietà elettriche dei differenti materiali che costituiscono il binario nel suo complesso, ma anche alle aree di contatto tra loro stessi e attraverso le quali avvengono gli scambi di corrente.

Nelle linee elettrificate, tra piede della rotaia e traversina è spesso presente una piastra in materiale polimerico (gomma) con lo scopo di aumentare l'isolamento elettrico tra rotaia e traversina stessa; il modello, per come è

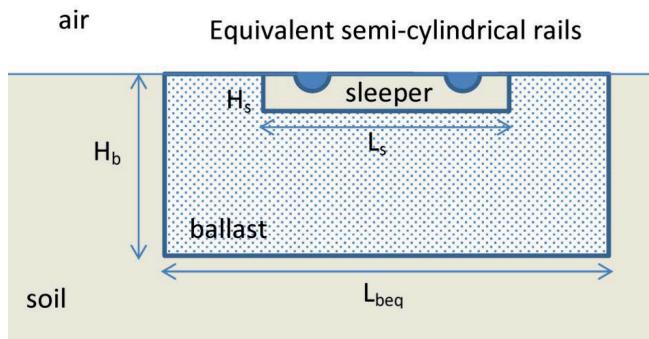


Fig. 1b - Semplificazione della geometria di un binario.  
Fig. 1b - Track geometry simplification.

- the ballast layer is represented by an equivalent rectangle, immersed in the ground, of  $H_b$  height and equivalent width  $L_{beq}$  such that the length of that part of the rectangle boundary that is in contact with the ground is equal to the trapezium major basis represented in fig. 1a i.e.:

$$L_{beq} = L_b - 2H_b \quad (4)$$

Formula (4) implies that the contact area between equivalent ballast and soil is equal to the one between real ballast and soil.

In order to justify formulas (3) and (4), it should be noted that conductances are related not only to the electrical properties of the different materials constituting the track as a whole but also to the contact areas between them and through which current exchanges occur.

In electrified lines, a polymeric (rubber) mat is often present between the foot of the rail and the sleeper, with the aim of increasing the electrical insulation between the rail and the sleeper themselves; the model, as described herein, does not take into account the presence of such a mat. Nevertheless, it could be suitably adapted, by introducing, in fig. 1b, a further semi-cylindrical layer of insulating material, interposed between rail and sleeper.

However, in Appendix B an approximate estimation of the contribution, relevant to such a mat, to the total conductance to ground of the rail is presented. The result is that such a contribution is very significant only in damp and rainy weather conditions together low values for soil resistivity.

### 3. Sensitivity analysis and results

#### 3.1. Preliminary considerations

As is logical to expect and as supported by experience [7], environmental conditions, especially weather conditions, strongly affect the conductance values of the rails; intuitively, the conductivity of sleepers and ballast increases with the humidity level; therefore, in damp and rainy weather, high conductivity values are expected while, in hot and dry weather conditions, the values tend to be low.

qui descritto, non tiene conto della presenza di tale piastra. Tuttavia esso può essere modificato introducendo, nella fig. 1b un ulteriore strato semicilindrico, di materiale isolante, interposto tra rotaia e traversina.

Comunque in Appendice B viene fatta una stima approssimata del contributo, alla conduttanza totale verso terra, della presenza di tale piastra. Il risultato è che tale contributo è molto significativo solo in condizioni climatiche umide e piovose unitamente a valori bassi di resistività del terreno.

### 3. Risultati e analisi di sensibilità

#### 3.1. Considerazioni preliminari

Come è logico attendersi e come suffragato dall'esperienza [7], le condizioni ambientali, in particolare quelle metereologiche, influenzano fortemente i valori di conduttanza delle rotaie; intuitivamente, la conducibilità di traversine e ballast aumenta con livello di umidità pertanto in condizioni di tempo umido e piovoso si attendono alti valori di conduttanza mentre, in condizioni di tempo caldo e secco, i valori tenderanno ad essere bassi.

Oltre al fattore meteorologico, la conducibilità di traversine e ballast è influenzata anche dall'età del binario e dal suo stato di manutenzione; infatti materiali di posa recente e ben manutenuti tendono ad essere migliori isolanti rispetto a materiali aventi vari anni di vita e con cattiva manutenzione.

Al contrario, cattiva manutenzione implica l'accumularsi, nel tempo, di ruggine, sporcizia, contaminanti, ecc. su ballast e traversine col risultato finale di diminuire il livello di isolamento elettrico delle rotaie verso terra e tra di loro.

Tenendo quindi conto sia del fattore meteorologico che dell'aspetto manutentivo del binario, nei calcoli che seguono, in accordo con [10], è conveniente suddividere i valori di conducibilità di ballast e traversine, indicate rispettivamente con  $\sigma_b$  e  $\sigma_s$ , rispettivamente in tre gruppi:

- valori bassi (condizioni climatiche secche e buon stato di manutenzione):  $\sigma_b$  e  $\sigma_s < 0.05 \text{ S}/\text{km}$ ;
- valori medi (condizioni climatiche normali e ordinario stato di manutenzione):  $0.1 \text{ S}/\text{km} < \sigma_b$  e  $\sigma_s < 1 \text{ S}/\text{km}$ ;
- valori alti (condizioni climatiche umide e piovose e scarso stato di manutenzione)  $\sigma_b$  e  $\sigma_s > 1 \text{ S}/\text{km}$ .

In particolare, in accordo con [11], poiché il rapporto  $\sigma_s/\sigma_b$  può spesso essere compreso tra due e tre, nei calcoli che seguono, abbiamo assunto:

- $\sigma_b = 0.01 \text{ S}/\text{km}$  e  $\sigma_s = 0.03 \text{ S}/\text{km}$  come valori rappresentativi per il primo gruppo;
- $\sigma_b = 0.25 \text{ S}/\text{km}$  e  $\sigma_s = 0.75 \text{ S}/\text{km}$  come valori rappresentativi per il secondo gruppo;
- $\sigma_b = 1.25 \text{ S}/\text{km}$  e  $\sigma_s = 3.75 \text{ S}/\text{km}$  come valori rappresentativi per il terzo gruppo.

*In addition to the meteorological factor, the conductivity of sleepers and ballast is also influenced by the age of the track and its maintenance status; in fact, recent and well maintained materials tend to be better insulating than materials with many years of life and poor maintenance.*

*On the contrary, poor maintenance implies accumulating, over time, of rust, dirt, contaminants, etc. on ballast and sleepers with the final result of decreasing the electrical insulation level of the rails with respect to the ground and between them.*

*By taking into account both the meteorological factor and the maintenance aspect of the track, in the following calculations, in accordance with [10], it is convenient to split up the conductivity values of ballast and sleepers, respectively indicated by  $\sigma_b$  and  $\sigma_s$  respectively, into three groups:*

- *low values (dry climatic conditions together good maintenance status):  $\sigma_b$  and  $\sigma_s < 0.05 \text{ S}/\text{km}$ ;*
- *average values (normal climatic conditions together ordinary maintenance status):  $0.1 \text{ S}/\text{km} < \sigma_b$  and  $\sigma_s < 1 \text{ S}/\text{km}$ ;*
- *high values (damp and rainy climatic conditions together bad maintenance status)  $\sigma_b$  and  $\sigma_s > 1 \text{ S}/\text{km}$ .*

*In particular, according to [11], since the ratio  $\sigma_s / \sigma_b$  can often be between two and three, in the following calculations we assumed:*

- $\sigma_b = 0.01 \text{ S}/\text{km}$  and  $\sigma_s = 0.03 \text{ S}/\text{km}$  as representative values for the first group;
- $\sigma_b = 0.25 \text{ S}/\text{km}$  and  $\sigma_s = 0.75 \text{ S}/\text{km}$  as representative values for the second group;
- $\sigma_b = 1.25 \text{ S}/\text{km}$  and  $\sigma_s = 3.75 \text{ S}/\text{km}$  as representative values for the third group.

*As one can notice in Appendix A, such parameters, together ground resistivity  $\rho$ , come into play in the formulas relevant to the BEM algorithm and significantly affect the results; in fact the next two paragraphs are devoted to calculating the p.u.l. to ground and mutual conductances by varying these parameters.*

*For brevity, the cases relevant to the first, second and third group are indicated with "dry conditions", "intermediate conditions" and "damp conditions" respectively.*

#### 3.2. Single track

*Since the two rails are identical and under the same laying conditions,  $G_{10} = G_{20}$ ; then we introduce the only symbol  $G_0$  for the p.u.l. rail conductance to the ground. Likewise, we indicate by  $G_m$  the p.u.l. mutual conductance among the rails.*

*Figs. 2a e 2b show the trend of  $G_0$  and  $G_m$  versus soil resistivity and in correspondence of different climatic and environmental conditions.*

*In order to compare the results here obtained for  $G_0$*

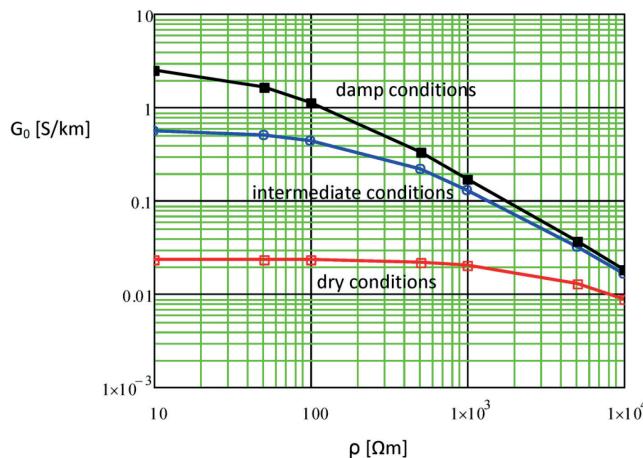


Fig. 2a - Conduttanza verso terra p.u.l. della rotaia in funzione della resistività del terreno per differenti condizioni ambientali.

Fig. 2a - p.u.l. rail conductance to ground versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

Tali parametri, unitamente alla resistività del terreno  $\rho$ , come si può vedere in Appendice A, entrano in gioco nelle formule che sono alla base dell'algoritmo BEM e influenzano in maniera significativa i risultati; infatti, i prossimi due paragrafi sono dedicati al calcolo delle conduttanze verso terra e mutue p.u.l. al variare di tali parametri.

Per brevità, nel seguito, i casi relativi al primo, secondo e terzo gruppo sono indicati rispettivamente con "dry conditions", "intermediate conditions" e "damp conditions".

### 3.2. Singolo binario

Poiché le due rotaie sono identiche e nelle medesime condizioni di posa, si ha che  $G_{10}=G_{20}$ ; quindi introduciamo un unico simbolo  $G_0$  per la conduttanza p.u.l. della rotaia verso terra. Parimenti indichiamo con  $G_m$  la conduttanza mutua p.u.l. tra le rotaie.

Le figg. 2a e 2b mostrano l'andamento di  $G_0$  e  $G_m$  al variare della resistività del terreno e valutate in corrispondenza di differenti condizioni climatiche e ambientali.

A titolo di confronto tra i risultati qui ottenuti per  $G_0$  con quelli disponibili in letteratura, è utile includere la tabella 1, riportata da [1], contenente i valori minimi, medi e massimi di conduttanza per differenti tipologie di binario.

Comparando i valori della fig. 2a con quelli della tabella 1 si nota come, sostanzialmente, i valori calcolati rientrino negli intervalli indicati in tabella.

Guardando le figg. 2a e 2b, si può

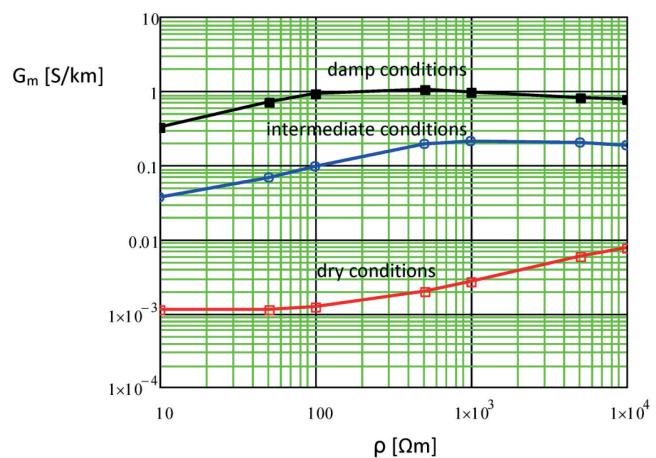


Fig. 2b - Mutua conduttanza p.u.l. tra le rotaie in funzione della resistività del terreno per differenti condizioni ambientali.

Fig. 2b - p.u.l. mutual conductance versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

with those available in literature, it is useful to include table 1, taken from [1], reporting minimum, average and maximum values for different track typologies.

By comparing the values of fig. 2a with the ones of table 1, one can notice that, basically, the calculated values fall within the ranges indicated in the table.

By looking at figs. 2a and 2b, it can be observed, as already predicted, that both conductance to ground and mutual conductance between the rails strongly depend on environmental conditions; soil resistivity mostly influences the conductance to ground mainly in the range [100, 10000]  $\Omega\text{m}$  in humid or normal climatic conditions; on the contrary, in dry climatic conditions it is the mutual conductance that has the greatest excursion by varying the soil resistivity in the [100, 10000]  $\Omega\text{m}$  range.

It can be useful to introduce the parameter  $\lambda$  representing the ratio between the p.u.l. conductance to ground and the p.u.l. mutual conductance:

$$\lambda = \frac{G_0}{G_m} \quad (5)$$

The graph in fig. 3 shows the trend of  $\lambda$  versus soil resistivity.

TABELLA 1 – TABLE 1

Valori tipici di conduttanza p.u.l. delle rotaie  
Typical values for p.u.l. rail conductance

	Min	Media Average	Max
Binario senza segnalamento Track without signalling purposes	[0.05, 0.1] S/km	[1, 2] S/km	[4, 5] S/km
Binario con segnalamento Track with signalling purposes	[0.02, 0.05] S/km	[0.5, 1] S/km	[1, 2] S/km

osservare, come già previsto, che sia la conduttanza verso terra che la mutua conduttanza tra le rotaie dipendono fortemente dalle condizioni ambientali; l'influenza della resistività del terreno si fa sentire soprattutto sulla conduttanza verso terra e principalmente nell'intervallo  $[100, 10000]\Omega\text{m}$  in condizioni climatiche umide oppure normali; al contrario, in condizioni climatiche secche è la mutua conduttanza ad avere la maggiore escursione al variare della resistività del terreno nell'intervallo  $[100, 10000]\Omega\text{m}$ .

Può essere utile introdurre il parametro  $\lambda$  che rappresenta il rapporto tra la conduttanza verso terra p.u.l. e la conduttanza mutua p.u.l.:

$$\lambda = \frac{G_0}{G_m} \quad (5)$$

Il grafico di fig. 3 mostra l'andamento di  $\lambda$  in funzione della resistività del terreno.

Dalla fig. 3, possiamo notare come:

- in condizioni ambientali secche la conduttanza verso terra è sempre predominante ( $\lambda > 1$ ) per tutto l'intervallo di  $\rho$ ;
- in condizioni ambientali normali ed umide, si ha predominanza di  $G_0$  in corrispondenza valori di resistività del terreno medio-bassi e, viceversa, predominanza di  $G_m$  per valori di resistività medio-alti; infatti, in presenza di alti valori di resistività del suolo, la dispersione verso terra della corrente è ostacolata mentre, al contrario, lo scambio di corrente tra una rotaia e l'altra è favorito ed avviene essenzialmente attraverso traversine e ballast che presentano una minor resistenza rispetto al suolo.

### 3.3. Doppio binario

È utile fare riferimento al modello di doppio binario mostrato in fig. 4 che estende quello mostrato in fig. 1 per un binario singolo.

Inoltre, sfruttando la simmetria della fig. 4, è conveniente, per il seguito, definire i seguenti parametri:

- $G_{0e}$  ( $G_{0e}=G_{10}=G_{40}$ ) conduttanza p.u.l. verso terra delle due rotaie esterne (cioè 1 e 4);
- $G_{0i}$  ( $G_{0i}=G_{20}=G_{30}$ ) conduttanza p.u.l. verso terra delle due rotaie interne (cioè 2 e 3);
- $G_m$  ( $G_m=G_{12}=G_{34}$ ) conduttanza mutua p.u.l. tra le due rotaie appartenenti allo stesso binario<sup>(3)</sup>;
- $G_{ii}$  ( $G_{ii}=G_{23}$ ) conduttanza mutua p.u.l. tra le due rotaie interne;

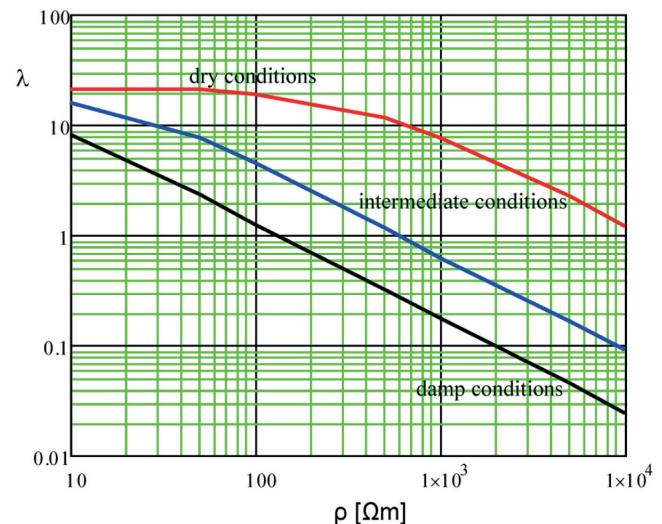


Fig. 3 - Rapporto tra  $G_0$  e  $G_m$  in funzione della resistività del terreno e per differenti condizioni ambientali.

Fig. 3 - Ratio between  $G_0$  and  $G_m$  versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

From fig. 3, we can notice that:

- in dry environmental conditions, the conductance to ground is always predominant ( $\lambda > 1$ ) throughout the whole range of  $\rho$ ;
- in normal and damp environmental conditions,  $G_0$  predominates in correspondence of medium-low values for soil resistivity; vice versa,  $G_m$  predominates for medium-high values of soil resistivity. In fact, in presence of high resistivity soils, the leakage current to ground is hindered while, on the contrary, the current exchange between rails is favoured and that essentially occurs via sleepers and ballast that offer a lesser electrical resistance with respect to the ground.

### 3.3. Double track

It is useful to refer to the double track model shown in fig. 4 that extends the one of fig. 1 for the single track.

In addition, by exploiting the symmetry of the fig. 4, it is convenient, for the following, to define these parameters:

- $G_{0e}$  ( $G_{0e}=G_{10}=G_{40}$ ) p.u.l. conductance to ground of external rails (i.e. 1 e 4);
- $G_{0i}$  ( $G_{0i}=G_{20}=G_{30}$ ) p.u.l. conductance to ground of internal rails (i.e. 2 e 3);
- $G_m$  ( $G_m=G_{12}=G_{34}$ ) p.u.l. mutual conductance between the two rails belonging to the same track<sup>(3)</sup>;

<sup>(3)</sup> Per la mutua conduttanza tra due rotaie dello stesso binario, abbiamo mantenuto, per comodità, lo stesso simbolo  $G_m$  già utilizzato nel caso del binario singolo.

<sup>(3)</sup> For convenience, in order to indicate the mutual conductance between the two rails belonging to the same track, we kept the same symbol  $G_m$  already used for the case of the single track.

- $G_{ie}$  ( $G_{ie}=G_{13}=G_{24}$ ) conduttanza mutua p.u.l. tra rotaia interna e rotaia esterna ma appartenenti a binari differenti;
- $G_{ee}$  ( $G_{ee}=G_{14}$ ) conduttanza mutua p.u.l. tra le due rotaie esterne.

Le figg. 5a e 5b mostrano rispettivamente l'andamento delle conduttanze verso terra e mutue al variare della resistività del terreno e valutate in corrispondenza di differenti condizioni ambientali.

Dalla fig. 5a, si vede chiaramente che le differenze tra  $G_{oi}$  e  $G_{oe}$  sono piccole con una predominanza di quest'ultima che cresce al crescere di  $\rho$ ; questo effetto è molto più evidente in condizioni ambientali normali ed umide mentre è del tutto trascurabile in condizioni ambientali secche.

Comunque si può notare come la presenza del secondo binario introduca uno sbilanciamento delle conduttanze verso terra tra le due rotaie del primo e viceversa.

La fig. 5b relativa alle conduttanze mutue mostra che:

- in condizioni ambientali secche esistono differenze molto significative tra  $G_{m}$ ,  $G_{ii}$ ,  $G_{ie}$  e  $G_{ee}$  soprattutto per bassi valori di resistività del suolo; tali differenze tendono a diminuire al crescere di  $\rho$ ;
- in condizioni ambientali normali ed umide si ha una situazione caratterizzata da minori differenze per bassi valori di resistività del suolo e, viceversa, maggiori differenze per alti valori di  $\rho$ .

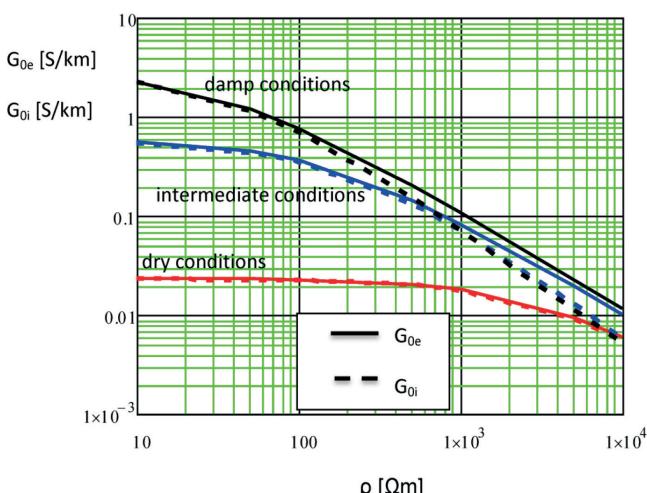


Fig. 5a - Conduttanze verso terra p.u.l. della rotaie in funzione della resistività del terreno per differenti condizioni ambientali.

Fig. 5a - p.u.l. rail conductances to ground versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

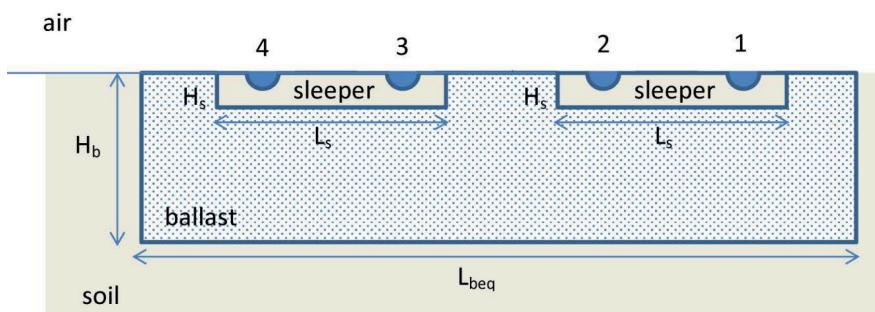


Fig. 4 - Modello di doppio binario.  
Fig. 4 - Double track model.

- $G_{ii}$  ( $G_{ii}=G_{23}$ ) p.u.l. mutual conductance between the two internal rails;
- $G_{ie}$  ( $G_{ie}=G_{13}=G_{24}$ ) p.u.l. mutual conductance between internal and external rails but belonging to different tracks;
- $G_{ee}$  ( $G_{ee}=G_{14}$ ) p.u.l. mutual conductance between the two external rails.

Figs. 5a and 5b show the trend of conductance to ground and mutual conductance respectively versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

From fig. 5a, it is clear that the differences between  $G_{oi}$  and  $G_{oe}$  are small with a predominance of the latter one growing with the increase of  $\rho$ ; this effect is much more noticeable in normal and damp environmental conditions while it is totally negligible in dry environmental conditions.

However, it may be noticed that the presence of the second track introduces an imbalance between the conductances to ground of the two rails belonging to the first track and vice versa.

fig. 5b relevant to mutual conductances shows that:

- in dry environmental conditions very significant differences exist among  $G_m$ ,  $G_{ii}$ ,  $G_{ie}$  and  $G_{ee}$ ; such differences tend to diminish by increasing  $\rho$ ;
- in normal and damp environmental conditions one has a situation characterized by lesser differences for low soil resistivity values and, vice versa, greater differences for high values of  $\rho$ .

Moreover, as was logical to expect, among the four mutual conductances considered, the most significant one is  $G_m$ ; this can be explained by taking into account that, in this case, the distance between the pair of rails is minimum. Furthermore, by looking at fig. 5b, consistently with the increasing distances between the different pairs of rails that can be considered, without changing all the other conditions, one always has:

$$G_m > G_{ii} > G_{ie} > G_{ee} \quad (6)$$

Inoltre, come era logico attendersi, tra le quattro mutue conduttanze considerate, quella più significativa è  $G_m$ ; questo risultato si spiega in base alla distanza che è minima tra le due rotaie di uno stesso binario. Inoltre, guardando la fig. 5b, coerentemente con le distanze crescenti tra le varie coppie di rotaie che si possono considerare, a parità di tutte le altre condizioni, si ha sempre:

$$G_m > G_{ii} > G_{ie} > G_{ee} \quad (6)$$

## 4. Conclusioni

Basandoci sul metodo di calcolo degli elementi al contorno (BEM), abbiamo valutato le conduttanze per unità di lunghezza, sia verso terra che mutue, delle rotaie di una linea ferroviaria. In particolare, abbiamo analizzato i casi di binario singolo e binario doppio al variare dei parametri più significativi in gioco cioè conducibilità di traversine e ballast e resistività del terreno.

Dallo studio è emerso che le conducibilità di traversine e ballast, le quali sono direttamente legate alle condizioni ambientali e allo stato di manutenzione del binario, influenzano radicalmente i valori delle conduttanze.

Anche la resistività del terreno gioca un ruolo importante e deve essere tenuta correttamente in conto per una valutazione il più possibile realistica del livello di isolamento elettrico delle rotaie e quindi delle correnti disperse da parte del circuito di ritorno della trazione elettrica.

Per concludere, osserviamo che il modello di calcolo ed i risultati presentati sono principalmente applicabili a situazioni in cui non vi siano particolari ambienti infrastrutturali quali gallerie, viadotti, ecc. Lo studio di questi casi specifici esula dagli scopi di questo articolo.

## APPENDICE A

In questa Appendice richiamiamo in maniera succinta l'algoritmo utilizzato per il calcolo delle conduttanze mediante il metodo BEM. Si rimanda a [6] per maggiori dettagli.

Occorre innanzi tutto richiamare il fatto che la matrice  $[g]$  dei coefficienti di conduttanza p.u.l. introdotta al par. 2.1 non viene direttamente calcolata, ma viene ottenuta tramite la matrice dei coefficienti di potenziale p.u.l.  $[w]$  (detti anche coefficienti di Maxwell) che è legata a  $[g]$  mediante la relazione:

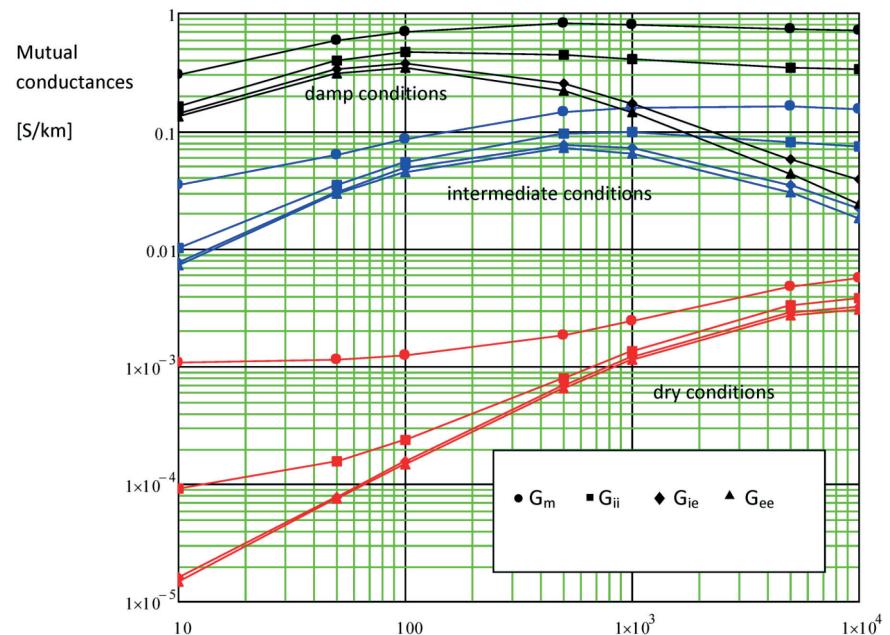


Fig. 5b - Mutue conduttanze p.u.l. tra le rotaie in funzione della resistività del terreno per differenti condizioni ambientali.

Fig. 5b - p.u.l. mutual conductances between rails versus soil resistivity in correspondence of different environmental conditions.

## 4. Conclusions

By using the Boundary Element Method (BEM) we assessed both the per unit length conductances to ground and the per unit length mutual conductances relevant to the rails of a railway line. In particular, we studied the single track and double track cases by varying the most significant parameters involved i.e. sleepers and ballast conductivities and soil resistivity.

From the study it results that sleepers and ballast conductivities, which are directly related to environmental conditions and track maintenance status, radically affect the conductance values.

Ground resistivity too plays an important role and must be properly taken into account for the most realistic possible evaluation of the electrical insulation level of the rails and consequently of the stray current from the return circuit of the electrified traction line.

Finally, we observe that the calculation model and the results here presented are mainly applicable to situations where there are no particular infrastructural environments such as tunnels, viaducts, etc. The study of these specific cases is outside the scope of this paper.

## APPENDIX A

In this Appendix we outline the algorithm used for the conductances calculation by means of BEM. Refer to [6] for more details.

$$[g] = [w]^{-1} \quad (A1)$$

Ora, se consideriamo un sistema di  $N$  rotaie<sup>(4)</sup> e  $I'_k$  è la corrente p.u.l dispersa dalla  $k$ -esima rotaia e  $V_{ik}$  è il potenziale elettrico prodotto sulla rotaia  $i$ -esima da parte di  $I'_k$ , si ha che il generico elemento  $w_{ik}$  della matrice  $[w]$  è dato da:

$$w_{ik} = \frac{V_{ik}}{I'_k} \quad I'_1 = \dots = I'_{k-1} = I'_{k+1} = \dots = I'_N = 0 \quad I'_k \neq 0 \quad (A2)$$

La (A2) mostra che, per calcolare i coefficienti di potenziale p.u.l., è necessario calcolare i potenziali assunti da ognuna delle rotaie a fronte della dispersione di corrente da parte delle rotaie stesse.

Tuttavia, occorre notare che il potenziale delle rotaie non dipende solo dalla corrente dispersa p.u.l. da parte delle rotaie ma anche dalla densità superficiale di carica  $\eta$  che si forma alla superficie di separazione tra differenti mezzi aventi differenti caratteristiche elettriche [12].

Pertanto, il calcolo del potenziale delle rotaie necessita il calcolo della densità superficiale di carica su tali superfici di separazione.

Con riferimento alla fig. 1b, le superfici di separazione sono rappresentate da: interfacce rotaie-traversina, interfaccia traversina-ballast, interfaccia ballast-suolo a cui si deve aggiungere l'interfaccia tra semipiano superiore e semipiano inferiore; grazie alla semplificazione della geometria del binario operata (fig. 1a e 1b) è possibile semplificare ulteriormente la trattazione del problema applicando la teoria delle immagini. In base ad essa, il potenziale prodotto in un generico punto  $(x, y)$  del semipiano inferiore può essere ottenuto considerando la geometria più semplice mostrata in fig. 6<sup>(5)</sup> dove l'aria è stata sostituita da immagini speculari, rispetto all'asse  $x$ , degli oggetti immagine hanno la stessa conducibilità di quelli reali mentre sui contorni immagine (rappresentati con linea tratteggiata) la densità superficiale di carica  $\eta$  è distribuita in maniera uguale e con ugual segno rispetto a quella sui contorni reali (rappresentati con linea continua).

Quindi, indicando con  $V_p$ ,  $\eta_{roti}$  ( $i=1,2$ ),  $\eta_{int}$  e  $\eta_{ext}$  rispettivamente il potenziale delle rotaie e le densità superficiali di carica sui contorni  $S_{roti} \cup S'_{roti}$  ( $i=1,2$ ),  $S_{int} \cup S'_{int}$  e  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  indicati in fig. 6 si possono scrivere le seguenti equazioni:

$$V_i = \frac{\eta_{roti}}{\epsilon_0} \frac{K_0(\gamma r_{eq})}{\gamma K_1(\gamma r_{eq})} + \frac{\eta_{rotj}}{\epsilon_0} \frac{K_0(\gamma |X_i - X_j|)}{\gamma K_1(\gamma r_{eq})}$$

<sup>(4)</sup> Per semplicità, in questa Appendice, supponiamo  $N=2$ .

<sup>(5)</sup> Per convenienza, in questa Appendice si è indicato con  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  le conducibilità rispettivamente di traversine, ballast e terreno. Rammentiamo poi che  $\rho=1/\sigma_3$ .

First of all, it is necessary to mention that the p.u.l. coefficients of conductance matrix  $[g]$ , introduced in par. 2.1, is not directly calculated but it is obtained by means of the coefficients of potential matrix  $[w]$  (also said Maxwell coefficients) that is related to  $[g]$  by means of the following relationship:

$$[g] = [w]^{-1} \quad (A1)$$

If we consider a system composed by  $N$  rails<sup>(4)</sup> and we define by  $I'_k$  the p.u.l leakage current from the  $k$ -th rail and by  $V_{ik}$  the electric potential produced on the  $i$ -th rail by  $I'_k$ , one has that the generic element  $w_{ik}$  of matrix  $[w]$  is given by:

$$w_{ik} = \frac{V_{ik}}{I'_k} \quad I'_1 = \dots = I'_{k-1} = I'_{k+1} = \dots = I'_N = 0 \quad I'_k \neq 0 \quad (A2)$$

Formula (A2) shows that, in order to calculate the p.u.l. coefficients of potential, it is necessary to calculate the potential of each rail generated by the leakage currents from the rails themselves.

Nevertheless, it is necessary to remark that the rail potential do not depend only on the p.u.l. leakage current from the rails but also on the surface charge density  $\eta$  that appears at the separation interface between different materials having different electrical characteristics [12].

Therefore, the rail potential calculation needs the surface charge density calculation on the separation interfaces.

With reference to fig. 1b, the separation interfaces are represented by: rail-sleeper interface, sleeper-ballast interface, ballast-soil interface; to these, one has also to add the interface between upper and lower half-planes. Thanks to the simplification of the geometry of the track (fig. 1a and fig. 1b), it is possible to further simplify the problem by applying the theory of images. According to it, the potential produced in a generic point  $(x, y)$  in the lower half-plane can be calculated by considering the simpler geometry shown in fig. 6<sup>(5)</sup> where the air has been substituted by mirror images, with respect to  $x$ -axis, of the objects present in lower half-plane. Moreover, the image objects have the same conductivity as the real ones while on the image contours (represented by dashed line) the surface charge density  $\eta$  has the same distribution and sign as on the real ones (represented by continuous line).

Hence, by indicating with  $V_p$ ,  $\eta_{roti}$  ( $i=1, 2$ ),  $\eta_{int}$  and  $\eta_{ext}$  the rail potential and the surface charge density on the contours  $S_{roti} \cup S'_{roti}$  ( $i=1, 2$ ),  $S_{int} \cup S'_{int}$  and  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  respectively (fig. 6), one can write the following equations:

<sup>(4)</sup> For simplicity, in this Appendix, we suppose  $N=2$ .

<sup>(5)</sup> For convenience, in this Appendix, we indicate by  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  the conductivities of sleepers, ballast and soil respectively. We further remind that  $\rho=1/\sigma_3$ .

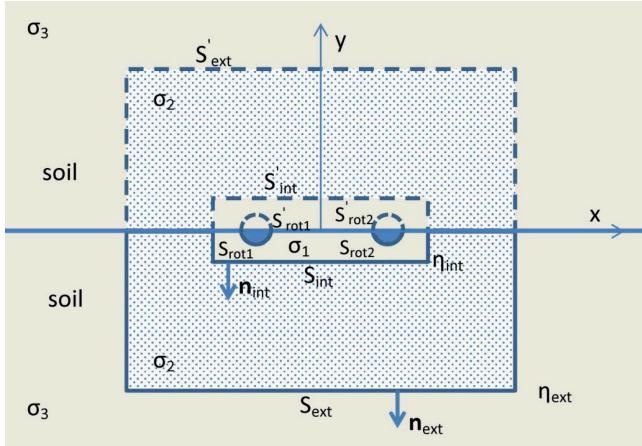


Fig. 6 - Modello equivalente della fig. 2b secondo la teoria delle immagini.

Fig. 6 - Equivalent model of fig. 2b according to image theory.

$$+ \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(\lambda_{int})}{2\pi\epsilon_0} K_0 \left( \gamma \sqrt{(x(\lambda_{int}) - X_i)^2 + (y(\lambda_{int}))^2} \right) d\lambda_{int} \quad (A3)$$

$$+ \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(\lambda_{ext})}{2\pi\epsilon_0} K_0 \left( \gamma \sqrt{(x(\lambda_{ext}) - X_i)^2 + (y(\lambda_{ext}))^2} \right) d\lambda_{ext}$$

(Ove  $i, j=1,2$  e  $i \neq j$ ). Tali equazioni esprimono il potenziale delle rotaie in funzione delle densità superficiali di carica presenti sia sulle rotaie che sulle interfacce  $S_{int} \cup S'_{int}$  e  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ .

$$\frac{\sigma_1 \pi r_{eq}}{\epsilon_0} \eta_{rot i} = I'_i \quad (A4)$$

Le equazioni (A4), ( $i=1,2$ ) legano la densità superficiale di carica presente sulle rotaie alla corrente dispersa p.u.l. dalle rotaie stesse.

Infine abbiamo:

$$\eta_{int}(\lambda_{int}) - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(\sigma_2 + \sigma_1)\pi} \left\{ \sum_{i=1}^4 F_i(\lambda_{int}) \right\} = 0 \quad (A5)$$

ove:

$$F_1 = \frac{2\pi\eta_{rot1}\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|)(r_{int}(\lambda_{int}) - R_1) \cdot n_{int}(\lambda_{int})}{\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|)|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|} \quad (A6)$$

$$F_2 = \frac{2\pi\eta_{rot2}\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|)(r_{int}(\lambda_{int}) - R_2) \cdot n_{int}(\lambda_{int})}{\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|)|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|} \quad (A7)$$

$$F_3 = \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ii}(\lambda_{int}, u)|)}{|R_{ii}(\lambda_{int}, u)|} R_{ii}(\lambda_{int}, u) \cdot n_{int}(\lambda_{int}) du \quad (A8)$$

$$F_4 = \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ie}(\lambda_{int}, u)|)}{|R_{ie}(\lambda_{int}, u)|} R_{ie}(\lambda_{int}, u) \cdot n_{int}(\lambda_{int}) du \quad (A9)$$

e:

$$\eta_{ext}(\lambda_{ext}) - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{(\sigma_3 + \sigma_2)\pi} \left\{ \sum_{i=5}^8 F_i(\lambda_{ext}) \right\} = 0 \quad (A10)$$

ove:

$$V_i = \frac{\eta_{rot i}}{\epsilon_0} \frac{K_0(\gamma r_{eq})}{\gamma K_1(\gamma r_{eq})} + \frac{\eta_{rot j}}{\epsilon_0} \frac{K_0(\gamma |X_i - X_j|)}{\gamma K_1(\gamma r_{eq})} + \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(\lambda_{int})}{2\pi\epsilon_0} K_0 \left( \gamma \sqrt{(x(\lambda_{int}) - X_i)^2 + (y(\lambda_{int}))^2} \right) d\lambda_{int} \quad (A3)$$

$$+ \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(\lambda_{ext})}{2\pi\epsilon_0} K_0 \left( \gamma \sqrt{(x(\lambda_{ext}) - X_i)^2 + (y(\lambda_{ext}))^2} \right) d\lambda_{ext}$$

where  $i, j=1, 2$  and  $i \neq j$ . These equations express the rails potential in function of the surface charge density that are present both on the rails and on the interfaces  $S_{int} \cup S'_{int}$  and  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ .

$$\frac{\sigma_1 \pi r_{eq}}{\epsilon_0} \eta_{rot i} = I'_i \quad (A4)$$

The equations (A4), ( $i=1, 2$ ) relate the surface charge density present on the rails to the p.u.l. leakage current from the rails themselves.

Finally, we have:

$$\eta_{int}(\lambda_{int}) - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(\sigma_2 + \sigma_1)\pi} \left\{ \sum_{i=1}^4 F_i(\lambda_{int}) \right\} = 0 \quad (A5)$$

where:

$$F_1 = \frac{2\pi\eta_{rot1}\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|)(r_{int}(\lambda_{int}) - R_1) \cdot n_{int}(\lambda_{int})}{\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|)|r_{int}(\lambda_{int}) - R_1|} \quad (A6)$$

$$F_2 = \frac{2\pi\eta_{rot2}\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|)(r_{int}(\lambda_{int}) - R_2) \cdot n_{int}(\lambda_{int})}{\gamma K_1(\gamma|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|)|r_{int}(\lambda_{int}) - R_2|} \quad (A7)$$

$$F_3 = \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ii}(\lambda_{int}, u)|)}{|R_{ii}(\lambda_{int}, u)|} R_{ii}(\lambda_{int}, u) \cdot n_{int}(\lambda_{int}) du \quad (A8)$$

$$F_4 = \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ie}(\lambda_{int}, u)|)}{|R_{ie}(\lambda_{int}, u)|} R_{ie}(\lambda_{int}, u) \cdot n_{int}(\lambda_{int}) du \quad (A9)$$

and:

$$\eta_{ext}(\lambda_{ext}) - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{(\sigma_3 + \sigma_2)\pi} \left\{ \sum_{i=5}^8 F_i(\lambda_{ext}) \right\} = 0 \quad (A10)$$

where:

$$F_5 = \frac{2\pi\eta_{rot1}\gamma K_1(\gamma|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_1|)(r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_1) \cdot n_{ext}(\lambda_{ext})}{\gamma K_1(\gamma|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_1|)|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_1|} \quad (A11)$$

$$F_6 = \frac{2\pi\eta_{rot2}\gamma K_1(\gamma|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_2|)(r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_2) \cdot n_{ext}(\lambda_{ext})}{\gamma K_1(\gamma|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_2|)|r_{ext}(\lambda_{ext}) - R_2|} \quad (A12)$$

$$F_7 = \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ei}(\lambda_{ext}, u)|)}{|R_{ei}(\lambda_{ext}, u)|} R_{ei}(\lambda_{ext}, u) \cdot n_{ext}(\lambda_{ext}) du \quad (A13)$$

$$F_8 = \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(u)\gamma K_1(\gamma|r_{ee}(\lambda_{ext}, u)|)}{|R_{ee}(\lambda_{ext}, u)|} R_{ee}(\lambda_{ext}, u) \cdot n_{ext}(\lambda_{ext}) du \quad (A14)$$

In formulas from (A3) to (A14) it is necessary to define the following quantities:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{u}_x \quad k = 1, 2 \quad (A15)$$

$$\mathbf{r}_{int}(\lambda_{int}) = \mathbf{x}_{int}(\lambda_{int}) \mathbf{u}_x + \mathbf{y}_{int}(\lambda_{int}) \mathbf{u}_y \quad (A16)$$

$$\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext}) = \mathbf{x}_{ext}(\lambda_{ext}) \mathbf{u}_x + \mathbf{y}_{ext}(\lambda_{ext}) \mathbf{u}_y \quad (A17)$$

$$F_5 = \frac{2\pi\eta_{rot1}\gamma K_1(\gamma|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_1|)(\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_1)\cdot\mathbf{n}_{ext}(\lambda_{ext})}{\gamma K_1(\gamma|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_1|)|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_1|} \quad (A11)$$

$$F_6 = \frac{2\pi\eta_{rot2}\gamma K_1(\gamma|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_2|)(\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_2)\cdot\mathbf{n}_{ext}(\lambda_{ext})}{\gamma K_1(\gamma|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_2|)|\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext})-\mathbf{R}_2|} \quad (A12)$$

$$F_7 = \oint_{S_{int} \cup S'_{int}} \frac{\eta_{int}(u)\gamma K_1(\gamma|\mathbf{R}_{ei}(\lambda_{ext}, u)|)}{|\mathbf{R}_{ei}(\lambda_{ext}, u)|} \mathbf{R}_{ei}(\lambda_{ext}, u) \cdot \mathbf{n}_{ext}(\lambda_{ext}) du \quad (A13)$$

$$F_8 = \oint_{S_{ext} \cup S'_{ext}} \frac{\eta_{ext}(u)\gamma K_1(\gamma|\mathbf{R}_{ee}(\lambda_{ext}, u)|)}{|\mathbf{R}_{ee}(\lambda_{ext}, u)|} \mathbf{R}_{ee}(\lambda_{ext}, u) \cdot \mathbf{n}_{ext}(\lambda_{ext}) du \quad (A14)$$

Nelle formule da (A3) a (A14) occorre definire le seguenti quantità:

$$\mathbf{R}_k = X_k \mathbf{u}_x \quad k = 1, 2 \quad (A15)$$

$$\mathbf{r}_{int}(\lambda_{int}) = x_{int}(\lambda_{int}) \mathbf{u}_x + y_{int}(\lambda_{int}) \mathbf{u}_y \quad (A16)$$

$$\mathbf{r}_{ext}(\lambda_{ext}) = x_{ext}(\lambda_{ext}) \mathbf{u}_x + y_{ext}(\lambda_{ext}) \mathbf{u}_y \quad (A17)$$

$$\mathbf{R}_{ii}(\lambda_{int}, u_{int}) = [x_{int}(\lambda_{int}) - x_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_x + [y_{int}(\lambda_{int}) - y_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_y \quad (A18)$$

$$\mathbf{R}_{ie}(\lambda_{int}, u_{ext}) = [x_{int}(\lambda_{int}) - x_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_x + [y_{int}(\lambda_{int}) - y_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_y \quad (A19)$$

$$\mathbf{R}_{ei}(\lambda_{ext}, u_{int}) = [x_{ext}(\lambda_{ext}) - x_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_x + [y_{ext}(\lambda_{ext}) - y_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_y \quad (A20)$$

$$\mathbf{R}_{ee}(\lambda_{ext}, u_{ext}) = [x_{ext}(\lambda_{ext}) - x_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_x + [y_{ext}(\lambda_{ext}) - y_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_y \quad (A21)$$

Con  $\mathbf{u}_x$  e  $\mathbf{u}_y$  che rappresentano rispettivamente i versori relativi agli assi x e y.

Le equazioni (A5) e (A10) sono dedotte dalle condizioni al contorno sulle interfacce  $S_{int} \cup S'_{int}$  e  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  per le componenti normali dei vettori densità di corrente  $\mathbf{J}$  e densità di flusso elettrico  $\mathbf{D}$  presenti nei mezzi 1, 2 e 3.

Nelle formule da (A3) fino ad (A21), i simboli in grassetto indicano grandezze vettoriali.

Inoltre, si ha:  $\epsilon_0$  costante dielettrica del vuoto,  $X_i$  ( $i=1,2$ ) coordinate x delle due rotaie rispetto al riferimento mostrato in Fig. 6,  $(x_{int}, y_{int})$  e  $\lambda_{int}$  coordinate e ascissa curvilinea del generico punto sul contorno  $S_{int} \cup S'_{int}$ ,  $(x_{ext}, y_{ext})$  e  $\lambda_{ext}$  coordinate e ascissa curvilinea del generico punto sul contorno  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ ,  $\mathbf{n}_{int}$  versore normale al contorno  $S_{int} \cup S'_{int}$ ,  $\mathbf{n}_{ext}$  versore normale al contorno  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ ,  $K_0$  e  $K_1$  funzioni di Bessel modificate di seconda specie rispettivamente di ordine 0 ed ordine 1. Infine,  $\gamma$  va calcolata, come spiegato nel seguito mediante una procedura iterativa.

Pertanto, le equazioni (A3), (A4), (A5) e (A10) costituiscono un sistema lineare non omogeneo di equazioni integrali nelle incognite  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\eta_{rot1}$ ,  $\eta_{rot2}$ ,  $\eta_{int}$  e  $\eta_{ext}$ .

Tale sistema deve essere risolto numericamente dopo essere stato opportunamente discretizzato e trasformato in un sistema algebrico lineare. A tale scopo, occorre suddividere i contorni  $S_{int} \cup S'_{int}$  e  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  rispettivamente in un opportuno numero  $N_i$  e  $N_e$  di segmenti su ognuno dei quali si assume una densità superficiale di carica costan-

$$\mathbf{R}_{ii}(\lambda_{int}, u_{int}) = [x_{int}(\lambda_{int}) - x_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_x + [y_{int}(\lambda_{int}) - y_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_y \quad (A18)$$

$$\mathbf{R}_{ie}(\lambda_{int}, u_{ext}) = [x_{int}(\lambda_{int}) - x_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_x + [y_{int}(\lambda_{int}) - y_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_y \quad (A19)$$

$$\mathbf{R}_{ei}(\lambda_{ext}, u_{int}) = [x_{ext}(\lambda_{ext}) - x_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_x + [y_{ext}(\lambda_{ext}) - y_{int}(u_{int})] \mathbf{u}_y \quad (A20)$$

$$\mathbf{R}_{ee}(\lambda_{ext}, u_{ext}) = [x_{ext}(\lambda_{ext}) - x_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_x + [y_{ext}(\lambda_{ext}) - y_{ext}(u_{ext})] \mathbf{u}_y \quad (A21)$$

Where  $\mathbf{u}_x$  and  $\mathbf{u}_y$  represent the unit vectors relevant to x and y axes respectively.

The equations (A5) and (A10) are deduced from the boundary conditions to be applied at the interfaces  $S_{int} \cup S'_{int}$  and  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  for the normal components relevant to the current density vector  $\mathbf{J}$  and electric flux density vector  $\mathbf{D}$  present in materials 1, 2 and 3.

In formulas from (A3) to (A21), the symbols in bold characters indicate vectorial quantities.

Moreover, one has:  $\epsilon_0$  permittivity of free space,  $X_i$  ( $i=1, 2$ ) rails abscissas with respect to the Cartesian reference shown in fig. 6,  $(x_{int}, y_{int})$  and  $\lambda_{int}$  coordinates and curvilinear abscissa of a generic point on the contour  $S_{int} \cup S'_{int}$ ,  $(x_{ext}, y_{ext})$  and  $\lambda_{ext}$  coordinates and curvilinear abscissa of a generic point on the contour  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ ,  $\mathbf{n}_{int}$  unit vector relevant to the contour  $S_{int} \cup S'_{int}$ ,  $\mathbf{n}_{ext}$  unit vector relevant to the contour  $S_{ext} \cup S'_{ext}$ ,  $K_0$  and  $K_1$  modified Bessel function of second kind and order 0 and 1 respectively. Finally,  $\gamma$  has to be calculated, as explained in the following, by means of an iterative procedure.

Therefore, equations (A3), (A4), (A5) and (A10) form a non-homogeneous linear system of integral equations having unknowns  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\eta_{rot1}$ ,  $\eta_{rot2}$ ,  $\eta_{int}$  and  $\eta_{ext}$ .

Such a system has to be numerically solved once suitably discretised and transformed into an algebraic linear system. To this aim, it is necessary to subdivide the contours  $S_{int} \cup S'_{int}$  and  $S_{ext} \cup S'_{ext}$  into a suitable number of segments  $N_i$  and  $N_e$  respectively where, on each of them, a constant surface charge density is assumed to be present; in such a way, we get the following groups of unknowns  $[\eta_{int1}, \eta_{int2}, \dots, \eta_{intNi}]$  and  $[\eta_{ext1}, \eta_{ext2}, \dots, \eta_{extNe}]$  that, together  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\eta_{rot1}$ ,  $\eta_{rot2}$ , form the complete set of unknowns of the problem.

To this aim, one defines the column vectors  $[v]$  and  $[Q]$  of  $(N_i + N_e + 4)$  order respectively given by:

$$v = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \eta_{rot1} \\ \eta_{rot2} \\ \eta_{int1} \\ \eta_{int2} \\ \vdots \\ \eta_{intNi} \\ \eta_{ext1} \\ \eta_{ext2} \\ \vdots \\ \eta_{extNe} \end{bmatrix} \quad (A22)$$

te; in tal modo, otteniamo i seguenti gruppi di incognite  $[\eta_{int1}, \eta_{int2}, \dots, \eta_{intNi}]$  e  $[\eta_{ext1}, \eta_{ext2}, \dots, \eta_{extNe}]$  che, unitamente a  $V_1, V_2, \eta_{rot1}, \eta_{rot2}$ , formano l'insieme completo di incognite del problema.

A tale scopo, si definiscono i vettori colonna  $[v]$  e  $[Q]$  di ordine  $(N_i+N_e+4)$  dati rispettivamente da:

$$v = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \eta_{rot1} \\ \eta_{rot2} \\ \eta_{int1} \\ \vdots \\ \eta_{intNi} \\ \eta_{est1} \\ \vdots \\ \eta_{estNe} \end{bmatrix} \quad (A22)$$

e:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I'_1 \\ I'_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A23)$$

Inoltre, discretizzando le equazioni da (A3) fino a (A21) si ricava una matrice quadrata  $[M(\gamma)]$  di ordine  $(N_i+N_e+4)$ . Per ragioni di spazio, non è possibile descrivere più nei dettagli tale matrice.

Il sistema di equazioni integrali, viene pertanto discretizzato nel seguente sistema algebrico scritto in forma compatta come:

$$[M(\gamma)][v] = [Q] \quad (A24)$$

Nella (A24), notiamo che la matrice  $[M]$  dipende dalla quantità  $\gamma$  che non è nota; questo implica che il sistema lineare (A24) venga risolto mediante una procedura iterativa applicando il metodo delle approssimazioni successive:

$$[v]^{k+1} = [M(\gamma_k)]^{-1}[Q] \quad (A25)$$

essendo  $[v]^{k+1}$  la soluzione ottenuta alla  $k$ -esima iterazione.

Un opportuno valore di partenza  $\gamma_0$  per la iterazione può essere:

$$\gamma_0 = \sqrt{r_{rot}\sigma_1} \quad (A26)$$

dove  $r_{rot}$  è la resistenza p.u.l. della rotaia.

and:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I'_1 \\ I'_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A23)$$

Moreover, by discretising equations from (A3) to (A21) one get a square matrix  $[M(\gamma)]$  of  $(N_i+N_e+4)$  order. For space reasons, it is not possible to describe in more details such a matrix.

Therefore, the integral equation system is discretised into the following algebraic system that can be written in compact form as:

$$[M(\gamma)][v] = [Q] \quad (A24)$$

In (A24), we can notice that the matrix  $[M]$  depends on the unknown quantity  $\gamma$ ; this implies that the linear system (A24) is solved by means of an iterative procedure by applying the method of successive of approximations:

$$[v]^{k+1} = [M(\gamma_k)]^{-1}[Q] \quad (A25)$$

Being  $[v]^{k+1}$  the solution obtained at the  $k$ -th iteration.

A suitable starting value  $\gamma_0$  for the iteration can be:

$$\gamma_0 = \sqrt{r_{rot}\sigma_1} \quad (A26)$$

where  $r_{rot}$  is the p.u.l. rail resistance.

Two, three iterations are usually sufficient to converge at the solution with a per cent relative difference between  $[v]^k$  and  $[v]^{k-1}$  less than 0.05%.

## APPENDIX B

In this Appendix, we want to show how to take into account, in approximate way, of the polymeric material mat interposed between the rail foot and the sleeper in order to achieve a better insulation level of the rail with respect to the ground.

If we consider a square mat of side  $L_p$ , thickness  $d$  and resistivity  $\rho_p$ , the resistance  $R_p$  that it offers to the current flow is given by:

$$R_p = \frac{\rho_p d}{L_p^2} \quad (B1)$$

Due, tre iterazioni sono in genere sufficienti per convergere alla soluzione con una differenza relativa percentuale tra  $[v]^k$  e  $[v]^{k-1}$  inferiore allo 0.05%.

## APPENDICE B

In questa Appendice, vogliamo mostrare come si possa tenere conto, in maniera approssimata, della piastra in materiale polimerico, interposta tra rotaia e traversina, allo scopo di meglio isolare la rotaia verso terra.

Ipotizzando una piastra di forma quadrata di lato  $L_p$ , spessore  $d$  e resistività  $\rho_p$ , la resistenza  $R_p$  che essa offre al passaggio di corrente è data da:

$$R_p = \frac{\rho_p d}{L_p^2} \quad (B1)$$

Per stimare il valore di  $\rho_p$  ipotizziamo che:  $L_p=15\text{cm}$  (lunghezza pari al piede della rotaia),  $d=5\text{mm}$ . Sappiamo inoltre che la resistenza verso terra deve essere maggiore di  $10\text{k}\Omega$ ; quindi, dalla (B1), si ha che deve essere  $\rho_p > 45 \cdot 10^3 \Omega\text{m}$ . Considereremo quindi  $\rho_p = 10^5 \Omega\text{m}$ .

Avendo, nel modello, trattato la rotaia come un semi-cilindro equivalente di raggio  $r_{eq}$  dato dalla (3), è ragionevole assumere che la piastra sia modellizzata da uno strato semicilindrico di materiale avente resistività  $\rho_p$ , raggio interno  $r_{eq}$  e spessore  $d$  la cui conduttanza p.u.l. è data da [9]:

$$G_p = \frac{\pi}{\rho_p \ln\left(\frac{r_{eq}+d}{r_{eq}}\right)} \quad (B2)$$

Nello scrivere la (B2), abbiamo tenuto conto del fatto che essendo la struttura semi-cilindrica ed essendo la formula riportata in [9] valida per una struttura cilindrica, quest'ultima va modificata moltiplicandola per il fattore  $\frac{1}{2}$ .

La conduttanza totale p.u.l. della rotaia verso terra  $G'_0$ , modificata per tener conto dello strato semi-cilindrico che simula la piastra è quindi data da:

$$G'_0 = \frac{G_0 G_p}{G_0 + G_p} \quad (B3)$$

La (B3) si ottiene considerando la serie della conduttanza  $G_0$  (calcolata in assenza della piastra) e della conduttanza della piastra  $G_p$  data dalla (B2).

In corrispondenza delle tre condizioni descritte al paragrafo 3.1 (sinteticamente descritte come: "dry conditions", "intermediate conditions" e "damp conditions") ed in corrispondenza di differenti valori di resistività del terreno  $\rho$ , abbiamo calcolato i valori per  $G_0$  e  $G'_0$ ; i risultati sono mostrati nelle tabelle 2, 3 e 4.

Come si può notare dalle tabelle 2, 3 e 4, nel caso "dry conditions" le differenze sono molto piccole e la presenza della piastra risulta sostanzialmente ininfluente. Le differenze sono rilevabili nel caso "intermediate conditions", soprattutto per valori di resistività del suolo bassi, men-

*In order to estimate the value of  $\rho_p$  let us assume:  $L_p=15\text{cm}$  (rail foot length),  $d=5\text{mm}$ . We also know that the resistance to ground must be greater than  $10\text{k}\Omega$ ; thus, from (B1) we have that  $\rho_p > 45 \cdot 10^3 \Omega\text{m}$ . Therefore, we consider  $\rho_p = 10^5 \Omega\text{m}$ .*

*Due to the fact that the rail has been modelled by an equivalent semi-cylinder having radius  $r_{eq}$  given by (3), it is reasonable to model the mat by a semi-cylindrical layer having resistivity  $\rho_p$ , internal radius  $r_{eq}$  and thickness  $d$ ; its p.u.l. conductance is given by [9]:*

$$G_p = \frac{\pi}{\rho_p \ln\left(\frac{r_{eq}+d}{r_{eq}}\right)} \quad (B2)$$

*In order to obtain (B2), one has to remind that having the layer a semi-cylindrical shape and being the formula reported in [9] valid for a cylindrical layer, the formula itself has to be modified by multiplying it for the factor  $\frac{1}{2}$ .*

TABELLA 2 – TABLE 2

Confronto tra  $G_0$  e  $G'_0$  per differenti valori di  $\rho$ :  
"dry conditions"  
Comparison between  $G_0$  and  $G'_0$  for different values of  $\rho$ :  
"dry conditions"

$\rho [\Omega\text{m}]$	<b>Senza piastra Without mat</b>	<b>Con piastra With mat</b>
	$G_0 [\text{S}/\text{km}]$	$G'_0 [\text{S}/\text{km}]$
10	0.0231	0.0215
50	0.023	0.0214
100	0.0228	0.0213
500	0.0215	0.0201
1000	0.02	0.0188
5000	0.0128	0.0123
10000	0.0088	0.0086

TABELLA 3 – TABLE 3

Confronto tra  $G_0$  e  $G'_0$  per differenti valori di  $\rho$ :  
"intermediate conditions"  
Comparison between  $G_0$  and  $G'_0$  for different values of  $\rho$ :  
"intermediate conditions"

$\rho [\Omega\text{m}]$	<b>Senza piastra Without mat</b>	<b>Con piastra With mat</b>
	$G_0 [\text{S}/\text{km}]$	$G'_0 [\text{S}/\text{km}]$
10	0.5604	0.2018
50	0.495	0.1927
100	0.4312	0.1822
500	0.2123	0.1269
1000	0.1295	0.0918
5000	0.0315	0.0286
10000	0.0162	0.0154

TABELLA 4 – TABLE 4

Confronto tra  $G_0$  e  $G_0'$  per differenti valori di  $\rho$ :  
“damp conditions”  
Comparison between  $G_0$  and  $G_0'$  for different values of  $\rho$ :  
“damp conditions”

$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	Senza piastra Without mat	Con piastra With mat
	$G_0$ [ $\text{S}/\text{km}$ ]	$G_0'$ [ $\text{S}/\text{km}$ ]
10	2.5071	0.2802
50	1.6228	0.2641
100	1.1232	0.2463
500	0.3232	0.1596
1000	0.1711	0.1109
5000	0.0362	0.0325
10000	0.0184	0.0174

tre sono molto significative nel caso “damp conditions” specialmente per valori bassi di resistività del terreno; comunque, in tutti i casi, all'aumentare di questo parametro le differenze tendono a diminuire.

Therefore, the total p.u.l. conductance  $G_0'$ , suitably modified in order to take into account the semi-cylindrical layer modelling the mat, is given by:

$$G_0' = \frac{G_0 G_p}{G_0 + G_p} \quad (B3)$$

Formula (B3) represents the series of conductance  $G_0'$  evaluated in absence of the mat, and of the mat conductance  $G_p$  given by (B2).

We calculated the values for  $G_0$  and  $G_0'$  in correspondence of the three conditions described in par. 3.1 (shortly identified by: “dry conditions”, “intermediate conditions” and “damp conditions”) and for different values of soil resistivity  $\rho$ ; the results are shown in tables 2, 3 and 4.

As it can be noticed from tables 2, 3 and 4, in the case “dry conditions” the differences are very small and the presence of the mat is practically negligible. The differences are detectable in the case “intermediate conditions”, mainly for low soil resistivity values, while they are very significant in the case “damp conditions” especially for low soil resistivity values; however, in all the cases, when increasing this parameter, the differences tend to decrease.

## BIBLIOGRAFIA - REFERENCES

- [1] ITU-T, “*Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines*”, Volume IV “*Inducing-currents and voltages in electrified railway systems*”, ITU Geneva 1989.
- [2] G. GUIDI BUFFARINI, G. GUIDI BUFFARINI, “*Modello multiconduttore per il calcolo delle correnti disperse nella trazione a c.c.*”, Ingegneria Ferroviaria, 12/2000, pp. 783-793.
- [3] A. MARISCOTTI, “*Distribution of the traction Return Current in AC and DC Electric Railway Systems*”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol.18, No. 4, October 2003.
- [4] R.J. HILL, S. BRILLANTE, P.J. LEONARD, “*Railway track transmission line parameters from finite element modelling: Shunt admittance*”, IEE Proc. Electr. Power Appl, 2000, 147, (3), pp. 227-238.
- [5] L. TENG, W. MINGLI, H. FAN et al., “*Finite element calculation of leakage resistance and distributed capacitance of rail to earth in ballastless track*”, IPST 2013 Proc. Int. Conf. On Power Systems Transients, Vancouver, Canada, July 2013.
- [6] G. LUCCA, “*Railway track transmission line model: calculation of rail conductance by means of boundary element method*”, IET Science, Measurement & Technology, volume 11, issue 8, November 2017, pp. 976-982.
- [7] ORE, “*Question A 122 Application of thyristors in railway technology: Consequences and remedies’ Report no.9, Study of the effect of interference on track circuits*”, (ORE-UIC, 1973).
- [8] A. MARISCOTTI, P. POZZOBON, “*Experimental Results on Low Rail-to-Rail Conductance Values*”, IEEE Trans. on Vehicular Technology, 2005, 54, (3), pp. 1219-1222.
- [9] ITU-T, “*Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines*”, Volume III “*Capacitive, inductive and conductive coupling: physical theory and calculation methods*”, ITU Geneva 1989.
- [10] A. OGUNSOLO, A. MARISCOTTI, “*Electromagnetic Compatibility in Railways - Analysis and Management*”, (Springer 2013), pp. 420-422.
- [11] R.J. HILL, S. BRILLANTE, C.R. DE SOUZA, et al., “*Electrical material data for railway track transmission line parameter studies*”, IEE Proc. Electr. Power Appl, 1999, 146, (1), pp. 60-68.
- [12] C.T.A. JOHNK, “*Engineering Electromagnetic Fields and Waves*” John Wiley & Sons, 1975, 1st edn.