

SCIENZA E TECNICA

Impostazione generale del calcolo elettrico delle linee di contatto della trazione a corrente alternata

Dott. Ing. Giuseppe GUIDI BUFFARINI (*)

SOMMARIO – Viene esposto un procedimento generale per il calcolo elettrico delle linee di contatto a corrente alternata tenendo conto della dispersione del binario verso terra, compreso il calcolo delle f.e.m. longitudinali indotte su conduttori paralleli adiacenti.

È illustrata l'applicazione alla trazione a corrente alternata monofase anche per il caso di sistema provvisto di trasformatori succitanti e di sistema con alimentatore in opposizione di fase ed autotrasformatori.

1. Introduzione

Le linee di contatto della trazione elettrica a corrente alternata differiscono sostanzialmente, agli effetti del calcolo elettrico, dalle linee elettriche destinate al trasporto di energia per il fatto che due conduttori della linea sono costituiti dalle rotaie di corsa le quali non sono isolate dal terreno ma presentano una dispersione che influenza sul comportamento del sistema. In particolare, non essendo nulla, per effetto di tale dispersione, la somma algebrica delle correnti nei conduttori, il sistema dà luogo, sulle linee aeree e in cavo parallele alla linea ferroviaria, a tensioni indotte anche in condizioni di esercizio normale, cosa che non si verifica nel caso delle linee elettriche di trasporto con neutro a terra per le quali l'inconveniente si manifesta solo in caso di guasto a terra.

Scopo della presente memoria è l'esposizione di una impostazione a carattere generale per la risoluzione della particolare rete elettrica costituita da una linea di contatto a corrente alternata (risoluzione che comprende anche il calcolo delle f.e.m. longitudinali indotte) e delle applicazioni ai casi particolari che interessano la trazione a corrente alternata monofase: sistema monofase semplice; sistema con trasformatori succitanti; sistema con alimentatore in opposizione di fase e autotrasformatori.

Si ritiene che l'impostazione proposta, senza avere nessuna pretesa di originalità in quanto ovviamente basata sulle ben note leggi fondamentali delle reti elettriche, possa essere di notevole utilità, dato che nella letteratura tecnica in materia i vari sistemi sono in genere trattati separatamente e spesso in modo incompleto; ciò vale anche per le "Directives des CCITT", nelle quali trovasi sviluppata in modo approfondito solo la parte riguardante il calcolo delle tensioni indotte e non la risoluzione elettrica completa del sistema.

L'impostazione illustrata nella presente memoria consente -ovviamente con l'ausilio di un calcolatore - di analizzare comodamente l'influenza dei vari parametri presenti nel sistema e quindi di orientare il progettista per le scelte ottimali.

Si precisa infine che, nel mettere in conto gli effetti della dispersione binario-terra, sono state assunte le ipotesi di binario di lunghezza indefinita e di terreno equipotenziale, ipotesi che sono

quelle generalmente adottate, anche perché consentono di affrontare il calcolo in modo non proibitivo dal punto di vista pratico.

2. Definizione del modello elettrico

Una linea di trazione elettrica è riconducibile, in generale, ad un sistema di n conduttori paralleli tra di loro e rispetto al terreno, che presenta le seguenti caratteristiche (fig. 1):

a) due conduttori, e cioè le due rotaie del binario, la cui lunghezza, per l'ipotesi già rammentata, si considera infinita, hanno verso il terreno una determinata conduttanza di dispersione per unità di lunghezza.

b) alcuni dei conduttori sono in parallelo tra di loro in punti talmente ravvicinati che il parallelo si può considerare continuo (ad esempio fune portante e filo di contatto, rotaie tra di loro);

c) in punti singolari della linea, impedenze o/e generatori (per semplicità rappresentati genericamente con rettangoli in fig. 1) risultano inseriti in serie in uno o più conduttori oppure sono derivati tra due o più conduttori.

Detti punti singolari, determinano la suddivisione del sistema in un numero N di sezioni (indicate con I, II, III, ..., N in fig. 1). In ciascuna delle sezioni la corrente in ogni conduttore è costante, salvo che nei conduttori che presentano dispersione verso il terreno.

La sezione I si estende sino al primo punto singolare, mentre la sezione N si estende oltre l'ultimo punto singolare; in tali 2 sezioni le correnti nei conduttori sono tutte nulle salvo che nei conduttori che presentano dispersione verso il terreno.

A titolo d'esempio, nel caso di sistema monofase semplice con un solo carico presente, il modello è quello di fig. 2 e comporta solo 3 sezioni.

3. Equazione generale relativa alla tensione lungo i conduttori

Si presuppone che il sistema sia alimentato da sorgenti alternate sinusoidali e si prende in esame la situazione di regime adottando, come di consueto per la rappresentazione delle gran-

(*) del Servizio Impianti Elettrici FS – Roma

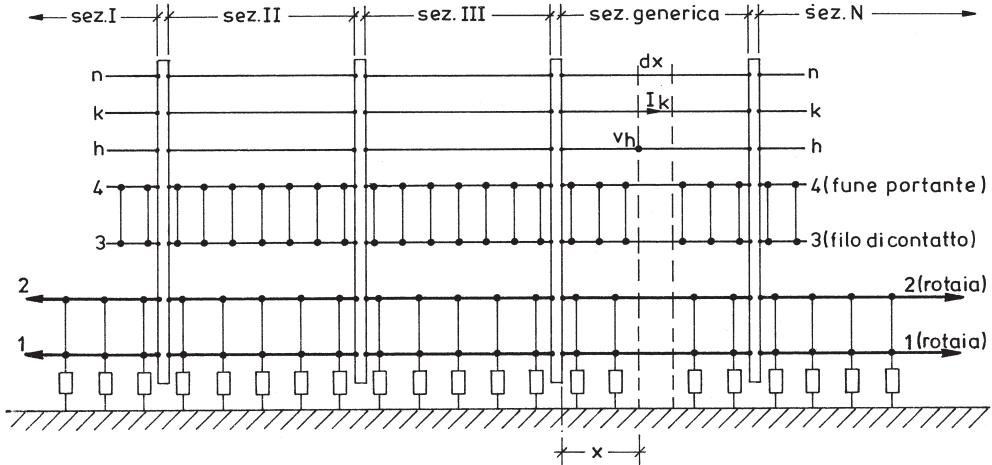


Fig. 1 – Modello elettrico di linea di contatto generica.

dezze sinusoidali, il metodo simbolico. Pertanto, nel seguito, tutti i simboli che rappresentano le tensioni, le correnti, le impedenze, ecc., vanno intesi come numeri complessi, anche se, per non complicare ulteriormente la grafia, viene omessa la consueta sovrapposizione.

Con riferimento alla fig. 1, si consideri una generica sezione del modello e si assuma un asse x di riferimento diretto verso destra con l'origine all'inizio della sezione.

Sia $V_h(x)$ la tensione verso terra del generico conduttore h ($h = 1, 2, \dots, n$).

Sia I_k la corrente nel generico conduttore k ($k = 1, 2, \dots, n$) con verso positivo coincidente con quello dell'asse x . Anche I_k è funzione di x , salvo che nei conduttori che non hanno dispersione verso terra, nei quali rimane costante lungo tutta la sezione.

Considerando un tratto elementare di lunghezza dx del generico conduttore h ed applicando il 2° principio di KIRCHHOFF alla

maglia elementare costituita dal tratto dx e relativo ritorno attraverso il terreno, si ha:

$$-dV_h = \sum_{k=1}^n I_k Z_{hk} dx,$$

$$-\frac{dV_h}{dx} = \sum_{k=1}^n I_k Z_{hk} \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

in cui:

$Z_{hk} = Z_{kh}$ è l'impedenza (per unità di lunghezza) mutua tra le due maglie costituite rispettivamente dal conduttore h e la terra e dal conduttore k e la terra; per k coincidente con h , Z_{hh} è l'impedenza propria della maglia costituita dal conduttore h e la terra.

Per il calcolo delle impedenze Z_{hk} e Z_{hh} si fa riferimento alle note formule di POLLACZEK e CARSON che sono richiamate, p. es. nelle Directives del CCITT.

4. Unificazione dei conduttori collegati in parallelo continuo tra di loro

Si supponga che tra due conduttori del sistema, contrassegnati con n e $n+1$, esistano collegamenti di parallelo franco disposti ad intervalli ravvicinati, rispetto alla lunghezza delle sezioni, in misura tale che i due conduttori possano in pratica essere considerati in parallelo continuo.

Applicando l'equazione generale (1), tenendo presente che il parallelo continuo impone l'uguaglianza delle tensioni dei due conduttori, si ha:

$$-\frac{dV_n}{dx} = \sum_{k=1}^{n-1} I_k Z_{nk} = -\frac{dV_{n+1}}{dx} = \sum_{k=1}^{n-1} I_k Z_{n+1,k}$$

cioè deve essere in ogni punto della sezione:

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k (Z_{nk} - Z_{n+1,k}) = 0;$$

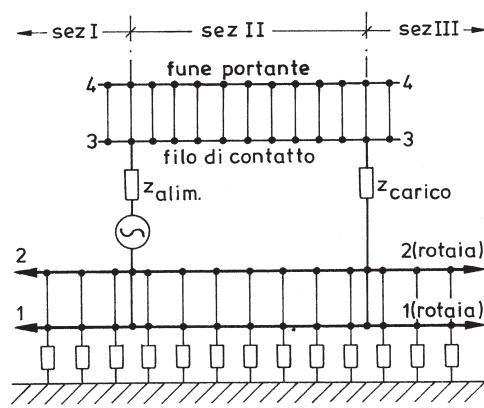


Fig. 2 – Modello elettrico di linea di contatto del sistema monofase.

Evidenziando in quest'ultima sommatoria i termini n esimo e n+1 esimo si ha:

$$\sum_{k=1}^{n-1} I_k(Z_{nk}-Z_{n+1,k}) + I_n(Z_{nn}-Z_{n+1,n}) + I_{n+1}(Z_{nn}-Z_{n+1,n+1}) = 0 \quad (2)$$

Sia I la somma delle due correnti nei conduttori n e n+1:

$$I_n + I_{n+1} = I \quad (3)$$

Risolvendo rispetto a I_n e I_{n+1} il sistema costituito dalla (2) e dalla (3) si ottiene:

$$\begin{cases} I_n = \frac{-\sum_{k=1}^{n-1} I_k(Z_{nk}-Z_{n+1,k}) - I(Z_{n+1,n+1})}{Z_{nn} + Z_{n+1,n+1} - 2Z_{n,n+1}} \\ I_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} I_k(Z_{nk}-Z_{n+1,k}) + I(Z_{nn}-Z_{n,n+1})}{Z_{nn} + Z_{n+1,n+1} - 2Z_{n,n+1}} \end{cases} \quad (4)$$

Riscrivendo l'equazione generale (1) per il conduttore generico h ed evidenziando i termini relativi a I_n e I_{n+1} si ha:

$$-\frac{dV_h}{dx} = \sum_{k=1}^{n-1} I_k Z_{hk} + I_n Z_{hn} + I_{n+1} Z_{h,n+1},$$

la quale con le sostituzioni fornite dalle (4), dà luogo, alla

$$\begin{aligned} -\frac{dV_h}{dx} &= \sum_{k=1}^{n-1} I_k \left[Z_{hk} + \frac{(Z_{nk}-Z_{n+1,k})(Z_{h,n+1}-Z_{hn})}{Z_{nn} + Z_{n+1,n+1} - 2Z_{n,n+1}} \right] + \\ &+ I \left[\frac{Z_{h,n+1}(Z_{nn}-Z_{n,n+1}) - Z_{hn}(Z_{n+1,n+1}-Z_{n,n+1})}{Z_{nn} + Z_{n+1,n+1} - 2Z_{n,n+1}} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

È facile vedere che la n esima e la n+1 esima delle equazioni (5) coincidono e quindi il numero delle (5) si riduce ad n.

D'altra parte, con semplici passaggi algebrici, si può verificare che nelle (5) il secondo termine tra parentesi quadrata viene a coincidere con il primo termine tra parentesi quadrata se in quest'ultimo si pone k = n. In definitiva, allora, le (5), posto $I_n = I$, si possono scrivere

$$-\frac{dV_h}{dx} = \sum_{k=1}^n I_k Z_{hk} \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

in cui

$$Z'_{hk} = Z_{hk} - \frac{(Z_{hn}-Z_{h,n+1})(Z_{kn}-Z_{k,n+1})}{Z_{nn} + Z_{n+1,n+1} - 2Z_{n,n+1}} \quad (7)$$

Cioè le equazioni (6) che regolano il sistema hanno ancora la forma generale (1), ma sono relative solo ai conduttori da 1 a n, come se il conduttore n+1 fosse eliminato e ci fosse solo il conduttore n percorso però dalla somma delle due correnti che realmente percorrono n e n+1, purché al posto delle impedanze effettive Z_{hk} si introducano quelle fittizie Z'_{hk} calcolabili con la (7).

In definitiva, per unificare i 2 conduttori n e n+1 in un unico conduttore n, è necessario e sufficiente sostituire alla matrice Z_{hk} di ordine n+1, la matrice Z'_{hk} di ordine n, calcolata mediante le (7).

È poi ovvio che, una volta eliminato il conduttore n+1, se ci sono altri conduttori in parallelo continuo con n e n+1, oppure se ci sono altri gruppi di conduttori in parallelo tra di loro, il metodo può essere iterato sino a ridurre ciascun gruppo di conduttori che sono in parallelo continuo tra di loro, ad un unico conduttore.

Si osserva inoltre che, nel caso particolare che i 2 conduttori

n e n+1 siano uguali e in posizione simmetrica rispetto a tutti gli altri ed al terreno, avendosi

$$\begin{cases} h < n & Z_{hn} = Z_{h,n+1} \\ k < n & Z_{kn} = Z_{k,n+1} \end{cases}$$

le (7) forniscono:

$$\begin{cases} Z_{hk} = Z_{hk} & \text{eccetto} \\ Z'_{nn} = Z_{nn} - \frac{(Z_{nn}-Z_{n,n+1})^2}{2Z_{nn}-2Z_{n,n+1}} = \frac{Z_{nn}+Z_{n,n+1}}{2} \end{cases} \quad (8)$$

La preventiva unificazione dei conduttori in parallelo opera-bile con le formule (7) o (8) è molto utile per la semplificazione degli ulteriori calcoli.

Come visto all'inizio del paragrafo, il procedimento di unificazione sopradescritto è condizionato unicamente dalla uguaglianza, in ogni punto, delle tensioni dei due conduttori considerati.

Ora, tale condizione si verifica anche quando – pur non essendo i collegamenti di parallelo talmente ravvicinati rispetto alla lunghezza delle sezioni da dar luogo ad una situazione di parallelo continuo – i due conduttori sono uguali e simmetricamente disposti rispetto a tutti gli altri.

Questa osservazione consente di unificare le rotaie tra di loro anche nei sistemi attrezzati con circuiti di binario aventi le due fughe di rotaie isolate, nei quali in effetti il parallelo tra le due rotaie, nel caso di sezioni corte, non può considerarsi continuo; in tal caso il procedimento di unificazione è ugualmente giustificato dalla uguaglianza delle due rotaie e dalla normalmente pressoché completa simmetria rispetto a tutti gli altri conduttori.

5. Impostazione del calcolo in presenza di dispersione binario-terra

Una volta effettuate le unificazioni possibili secondo la procedura indicata nel precedente paragrafo, il modello generale normalmente si semplifica in quello indicato in fig. 3, in cui:

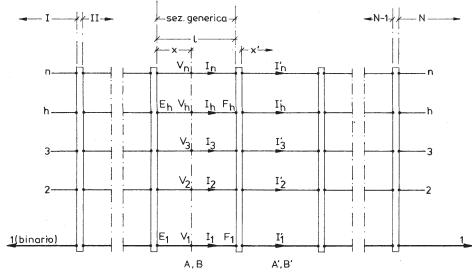


Fig. 3 – Modello generale semplificato, dopo le unificazioni.

– il conduttore 1 rappresenta il binario con unificato ad esso anche l'eventuale trefolo di ritorno nel caso che si possa considerare in parallelo continuo con il binario;

– il conduttore 2 rappresenta la linea di contatto;

– i conduttori 3 ... n sono gli altri eventuali conduttori che non sono stati unificati con 1 o 2 perché non trovansi nelle condizioni di parallelo continuo con essi.

Il conduttore 1 è l'unico che presenta una conduttanza di dispersione verso terra, che si ammette costante lungo la linea, di valore g (S/Km).

Per motivi di semplicità di notazione, si contrasseggino d'ora in poi con Z_{hk} non più le impedenze originarie, ma quelle finali risultanti dal procedimento di unificazione attraverso le (7). Allora l'equazione generale (6) relativa al conduttore 1 si scrive

$$-\frac{dV_1}{dx} = I(x) Z_{11} + \sum_{k=2}^n I_k Z_{1k} \quad (9)$$

nella quale solo I_1 è variabile con x , mentre le altre correnti sono costanti lungo tutta la sezione.

D'altra parte è $-dI_1 = V_1(x) g dx$

cioè $-\frac{dI_1}{dx} = g V_1(x)$

Derivando la (9) si ottiene

$$-\frac{d^2V_1}{dx^2} = Z_{11} \frac{dI_1}{dx} = -Z_{11} g V_1 \quad (10)$$

La soluzione della equazione differenziale (10), ben nota nell'elettrotecnica, si può porre nella forma

$$V_1(x) = Z_c (A e^{ix} - B e^{-ix}) \quad (11)$$

in cui $\gamma = \sqrt{g Z_{11}}$ e $Z_c = \sqrt{\frac{Z_{11}}{g}}$

mentre A e B sono delle costanti relative alla sezione considerata, da determinare in base alle condizioni ai limiti della sezione.

D'altra parte dalla (9) si ricava

$$I_1 = -\frac{1}{Z_{11}} \frac{dV_1}{dx} - \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1k}}{Z_{11}} \quad (12)$$

Sostituendo al posto di $\frac{dV_1}{dx}$ il valore fornito dalla (11), si ottiene infine, tenuto conto che $\gamma Z_c = Z_{11}$:

$$I_1 = A e^{-ix} + B e^{ix} - \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1k}}{Z_{11}} \quad (13)$$

Le condizioni ai limiti necessarie per la determinazione delle costanti A e B si ricavano dall'applicazione, ai punti iniziali e terminali di ciascuna sezione, del 1° principio di KIRCHHOFF e della unicità della tensione binario/terra.

Si contrasseggino con un apice le grandezze relative alla sezione successiva (fig. 3). Al confine tra le due sezioni deve essere

$$\sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n I'_k, \text{ cioè}$$

$$I_{1(0)} + \sum_{k=2}^n I_k = I'_{1(x=0)} + \sum_{k=2}^n I'_k$$

Applicando la (13) si ottiene:

$$A e^{-il} + B e^{il} - A' e^{-il} - B' e^{il} + \sum_{k=2}^n (I'_k - I_k) \left(\frac{Z_{1k}}{Z_{11}} - 1 \right) = 0 \quad (14)$$

L'unicità della tensione impone:

$$A e^{-il} - B e^{il} - A' e^{-il} - B' e^{il} = 0 \quad (15)$$

Sommando la (14) con la (15) si ha

$$2A e^{-il} - 2A' e^{-il} + \sum_{k=2}^n (I'_k - I_k) \left(\frac{Z_{1k}}{Z_{11}} - 1 \right) = 0 \quad (16)$$

La (15) e la (16) sono equazioni da applicare a ciascun confine di sezione, esclusi i confini I/II e N-1/N.

Nella sezione I (iniziale) ed N (estrema) tutte le correnti sono nulle tranne I_1 .

Nella sezione N, dovendo essere per $x \rightarrow \infty V_1 \rightarrow 0$, è necessariamente $B = 0$, per cui V_1 e I_1 sono legate tra di loro dalla relazione $V_1 = Z_c I_1 e^{-ix}$.

Analogamente nella sezione I, assunto come origine delle x il confine I/II (verso positivo sempre verso destra), la condizione $V_1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ impone $A = 0$, per cui V_1 e I_1 sono legate tra di loro dalla relazione $V_1 = -Z_c I_1 e^{ix}$.

In base alle suddette condizioni particolari valide per le sezioni I e N si ricava, dopo passaggi che qui non si riportano, che ai confini I/II e N-1/N la (15) e la (16) sono sostituite dalle seguenti relazioni:

- confine I/II:

$$2A = \sum_{k=2}^n I_k \left(\frac{Z_{1k}}{Z_{11}} - 1 \right) \quad (A \text{ e } I_k \text{ relative alla sez. II}) \quad (17)$$

- confine N-1/N:

$$2B e^{il} = \sum_{k=2}^n I_k \left(\frac{Z_{1k}}{Z_{11}} - 1 \right) \quad (B, I_k \text{ e } l \text{ relative alla sez. N-1}) \quad (18)$$

Riprendendo ora in considerazione l'equazione (6) relativa al generico conduttore $h = 2, 3, \dots, n$ ed integrando a tutta la sezione si ottiene, indicando con E_h ed F_h le tensioni verso terra rispettivamente all'inizio ed alla fine della sezione, (fig. 3):

$$E_h - F_h = Z_{1h} \int_0^l I_1 dx + \sum_{k=2}^n Z_{hk} I_k \quad (19)$$

Ma, in base alla (12):

$$Z_{1h} \int_0^l I_1 dx = (E_1 - F_1) \frac{Z_{1h}}{Z_{11}} - l \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1h} Z_{1k}}{Z_{11}} \quad (20)$$

e quindi

$$E_h - F_h = (E_1 - F_1) \frac{Z_{1h}}{Z_{11}} + l \sum_{k=2}^n I_k \left(Z_{hk} - \frac{Z_{1h} Z_{1k}}{Z_{11}} \right) \quad (21)$$

Poiché $E_h = E_1 + E_{h1}$, $F_h = F_1 + F_{h1}$ ove E_{h1} e F_{h1} sono le tensioni del generico conduttore h verso il binario, rispettivamente all'inizio ed alla fine della sezione, si ha, sostituendo nella (21):

$$E_h - F_h = (E_1 - F_1) \left(\frac{Z_{1h}}{Z_{11}} - 1 \right) + l \sum_{k=2}^n I_k \left(Z_{hk} - \frac{Z_{1h} Z_{1k}}{Z_{11}} \right)$$

Ed infine, tenendo conto della (11) che fornisce

$$E_1 = Z_c (A + B) \quad e \quad F_1 = Z_c (A e^{-il} - B e^{il})$$

si ottiene:

$$E_h - F_h = Z_c \left(\frac{Z_{1h}}{Z_{11}} - 1 \right) [A(1 - e^{-il}) - B(1 - e^{il})] + l \sum_{k=2}^n I_k \left(Z_{hk} - \frac{Z_{1h} Z_{1k}}{Z_{11}} \right) \quad (22)$$

Le espressioni cui si è pervenuti nel presente paragrafo possono in definitiva essere riassunte nella tabella 1.

| TABELLA 1 (con riferimento alla fig. 3) | |
|---|---|
| a) Posizioni: | $\gamma = \sqrt{g Z_{11}}$; $Z_c = \sqrt{\frac{Z_{11}}{g}}$; $p_n = \frac{Z_{1n}}{Z_{11}} - 1$ |
| | $N_n = Z_c p_n$; $M_{nk} = Z_{hk} - \frac{Z_{1n} Z_{1k}}{Z_{11}}$ |
| b) In un punto generico x di una sezione: | <ul style="list-style-type: none"> -tensione binario/terra: $V_1(x) = Z_c(A e^{-\gamma x} - B e^{\gamma x})$; (11) -corrente nel binario: $I_1(x) = A e^{-\gamma x} + B e^{\gamma x} - \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1k}}{Z_{11}}$; (13) con A e B costanti relative alla sezione considerata. |
| c) Relazioni tra A e B e le correnti e le tensioni nei conduttori (E all'inizio e F alla fine della sezione): | <ul style="list-style-type: none"> -per ciascuna sezione e per ciascuno degli $n-1$ conduttori ($h=2,3,\dots,n$): |
| | $E_{hi} - F_{hi} = N_h \left[A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l}) + l \sum_{k=2}^n I_k M_{hk} \right]$ (23) |
| | (con l =lunghezza della sezione) |
| | -al confine I/II: |
| | $2A = \sum_{k=2}^n I_k p_k$ (con A e I_k relativi alla sez II); (24) |
| | -al confine N-1/N: |
| | $2B e^{\gamma l} = \sum_{k=2}^n I_k p_k$ (con B e I_k relativi alla sez. N-1) (25) |
| | -al confine tra le altre sezioni: |
| | $\begin{cases} 2A e^{\gamma l} - 2A' + \sum_{k=2}^n (I'_k - I_k) p_k = 0 \\ A e^{-\gamma l} - B e^{\gamma l} - A' + B' = 0 \end{cases}$ (26) |
| | (con A' , B' e I'_k relative alla sezione successiva a quella considerata). |

Le relazioni riportate nella Tab. 1, unitamente a quelle che legano le tensioni e le correnti dei diversi conduttori ai confini tra una sezione e la successiva e che dipendono dal particolare caso di linea considerata, vengono a costituire un sistema di equazioni algebriche di 1° grado (a coefficienti ed incognite complessi), le cui incognite sono:

- le correnti di ogni conduttore (binario escluso) in ciascuna sezione;
- le tensioni di ogni conduttore verso il binario, ai confini di ciascuna sezione;
- le costanti A e B relative alla corrente e alla tensione verso terra del binario, in ciascuna sezione.

La soluzione di tale sistema di equazioni risolve completamente la rete considerata.

Quanto sopra risulterà più chiaro dall'applicazione che viene in seguito succintamente esposta per i casi particolari che più interessano.

6. Espressione della F.E.M. longitudinale indotta su un conduttore parallelo

Prima però di trattare detti casi particolari, è opportuno ricavare l'espressione della forza elettromotrice longitudinale indotta in un conduttore parallelo alla linea, che si deduce immediatamente dalle relazioni cui si è pervenuti nel precedente paragrafo.

Indotata genericamente con "i" detto conduttore, la f.e.m. indotta sul tratto di parallelismo corrispondente ad una sezione vale:

$$f = \int_0^l \sum_{k=1}^n I_k Z_{ik} dx = l \sum_{k=2}^n I_k Z_{ik} + Z_{1i} \int_0^l I_i dx \quad (28)$$

(Ovviamente il valore Z_{ik} è quello che si ottiene coinvolgendo anche il conduttore i , come gli altri, nell'eventuale procedimento di unificazione di cui al paragr. 4).

Poiché l'espressione di $\int_0^l I_i dx$ in base alla (20) e alla (11) è:

$$\begin{aligned} \int_0^l I_i dx &= \frac{E_1 - F_1}{Z_{11}} - l \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1k}}{Z_{11}} = \frac{Z_c [A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l})]}{Z_{11}} + \\ &- l \sum_{k=2}^n \frac{I_k Z_{1k}}{Z_{11}} = \frac{A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l})}{\gamma} - l \sum_{k=2}^n I_k \frac{Z_{1k}}{Z_{11}}, \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} f &= l \sum_{k=2}^n I_k \left[Z_{1k} - \frac{Z_{1k} Z_{1i}}{Z_{11}} \right] + \frac{Z_{1i}}{\gamma} \left[A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l}) \right] = \\ &= l \sum_{k=2}^n I_k M_{ki} + \frac{Z_{1i}}{\gamma} [A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l})] \end{aligned} \quad (29)$$

Per i cavi lontani, per i quali $Z_{hi} = Z_{li}$:

$$f = Z_{1i} \left[l \sum_{k=2}^n I_k \left(1 - \frac{Z_{1k}}{Z_{11}} \right) + \frac{A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l})}{\gamma} \right]$$

cioè

$$f = Z_{1i} \left[\frac{A(1-e^{-\gamma l}) - B(1-e^{\gamma l})}{\gamma} - l \sum_{k=2}^n I_k p_k \right] \quad (30)$$

Una volta quindi calcolate le correnti I_k e le costanti A e B , la (29) o la (30) forniscono immediatamente la f .

7. Caso particolare di linea di contatto di sistema monofase semplice, con alimentazione a sbalzo

Dopo effettuate le unificazioni di cui è detto al paragrafo 4, il modello di calcolo si riduce a quello di fig. 4.

Tale modello è molto semplice e la soluzione delle equazioni generali può essere subito esplicitata, in funzione della corrente di carico I . Infatti, applicando la (23), la (24) e la (25) della Tab. 1, si hanno immediatamente le 3 equazioni

$$\begin{cases} E_{21} - F_{21} = N_2 [A(1-e^{\gamma l}) - B(1-e^{-\gamma l})] + l I M_{22} \\ 2A = I p_2 \\ 2B e^{\gamma l} = I p_2 \end{cases}$$

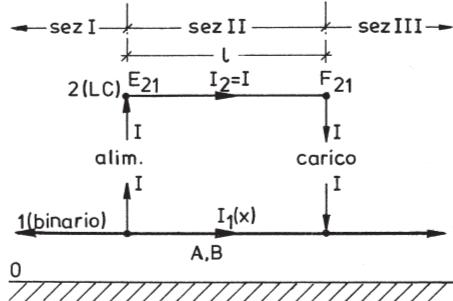


Fig. 4 - Modello semplificato di linea di contatto del sistema monofase.

da cui

$$A = \frac{I P_2}{2} ; \quad B = \frac{I P_2}{2} e^{-n}$$

ed effettuando le sostituzioni

$$E_{21} - F_{21} = I [P_2^2 Z_c (1 - e^{-n}) + I M_{22}]$$

Si ricavano quindi immediatamente l'impedenza chilometrica risultante della linea pari a $\frac{E_{21} - F_{21}}{I}$, l'andamento della corrente

I_1 , fornito dalla (13), e della tensione binario/terra dato dalla (11), e infine la f.e.m. indotta sui cavi paralleli. Le espressioni ottenute, che esauriscono il caso del sistema monofase semplice, sono raccolte nella tab. 2, nella quale sono riportate anche le formule semplificate nelle 2 ipotesi estreme di $g = \infty$ e di $g = 0$.

8. Caso particolare del sistema monofase con trasformatori succhianti

Si suppone noto il principio sul quale tale sistema è basato; la sua configurazione, nello schema di più comune impiego, si presenta come in fig. 5. Un treolo di ritorno è collegato al binario con passo costante; al centro di ciascun tratto è inserito un trasformatore succhiante con gli avvolgimenti primario e secondario-

ri in serie rispettivamente sulla LC e sul trefolo. In fig. 5 si è preso in considerazione, a titolo di esempio, il caso di carico situato nella prima metà del 4° tratto.

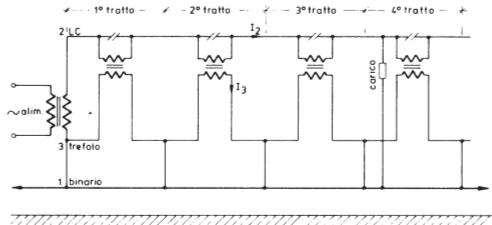


Fig. 5 - Sistema monofase con trasformatori succhianti.

Le relazioni concernenti le correnti e le tensioni di ciascun trasformatore si ricavano facilmente dal suo schema equivalente, come indicato in fig. 6.

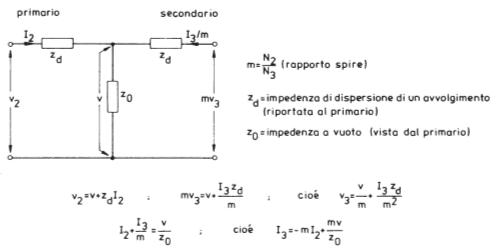


Fig. 6 - Schema equivalente di un trasformatore succhiante.

Pertanto il modello di calcolo corrispondente allo schema di fig. 5 risulta quello di fig. 7, avendo tenuto conto che nel modello, rispetto allo schema equivalente, la forza controelettromotrice u è uguale e contraria a v .

| TABELLA 2 - SISTEMA MONOFASE SEMPLICE | | | | LEGENDA |
|---|--|---|--|--|
| | Formule generali | per $g=\infty$ | per $g=0$ | |
| Impedenza di linea (Ω/km) | $Z_{11} \left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right)^2 \frac{1 - e^{-n}}{\gamma} + Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$ | $Z_{22} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$ | $Z_{11} + Z_{22} - 2Z_{12}$ | $l = \text{lunghezza del tratto di linea (km)}$ |
| Corrente di ritorno (A) | per x generico | $-I \left[\left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right) \left(\frac{e^{jx} + e^{-j(l-x)}}{2} \right) + \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right] - I \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ (escluso $x=0; x=l$) | $-I$ | $Z_{11} = \text{impedenza maglia ritorno/terra (\Omega/km)}$ |
| | per $x=0$ | $-I \left[\left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right) \frac{1 + e^{-n}}{2} + \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right] - I \frac{1 + Z_{12}}{2}$ | $-I$ | $Z_{22} = \text{" linea contatto/terra (\Omega/km)}$ |
| Tensione bin/terra (V) | per x generico | $-I (Z_{11} - Z_{12}) \frac{e^{jx} - e^{-j(l-x)}}{2\gamma}$ | 0 | $Z_{12} = \text{" mutua tra le 2 maglie sudette (\Omega/km)}$ |
| | per $x=0$ | $-I (Z_{11} - Z_{12}) \frac{1 - e^{-n}}{2\gamma}$ | 0 | $Z_{11} = \text{" mutua tra le maglie ritorno/terra e conduttore indotto/terra (\Omega/km)}$ |
| f.e.m. indotta su un conduttore (V/km) | in generale | $I Z_{11} \left[\frac{Z_{22} - Z_{12}}{Z_{11}} - \left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right) \left(1 - e^{-n} \right) \right]$ | $I Z_{11} \left(\frac{Z_{22} - Z_{12}}{Z_{11}} \right)$ | $Z_{21} = \text{" mutua tra le maglie linea di contatto/terra e conduttore indotto/terra (\Omega/km)}$ |
| | per $Z_{11} = Z_{21}$ conduttore lontano | $I Z_{11} \left[\left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right) \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{\gamma} \right) \right]$ | $I Z_{11} \left(1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right)$ | $g = \text{conduttanza di dispersione del ritorno verso terra (S/km)}$ |
| | | | 0 | $\gamma = \sqrt{Z_{11} g}$ |
| | | | | $I = \text{corrente di carico (A)}$ |

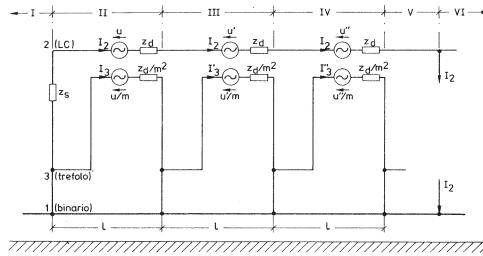


Fig. 7 - Modello elettrico per il calcolo del sistema di figura 5

In ciascun trasformatore I_3 e I_2 sono legati dalla relazione

$$I_3 = -m I_2 - \frac{mu}{Z_0} \quad (31)$$

in cui I_2 è assegnata e costante in tutte le sezioni (escluse la I e la VI in cui è nulla) mentre u e I_3 sono, in generale, diverse da sezione a sezione.

Nel modello di fig. 7 è considerata la rete con impressa la corrente di carico I_2 , ma con soppresso il generatore di alimentazione; ovviamente a tale situazione va sovrapposta quella di corrente impressa nulla ma di generatore di alimentazione presente, la cui risoluzione è banale (correnti tutte nulle e tensione LC/binario ovunque pari alla tensione a vuoto).

Alla risoluzione del modello di fig. 7 è possibile pervenire applicando l'impostazione generale precedentemente esposta. Senza entrare nel dettaglio, si vede però che il calcolo si presenta in pratica piuttosto complesso, poiché già nel caso semplice considerato (solo 3 trasformatori tra l'alimentazione e il carico) le incognite sono 18 così costituite:

- in ciascuna delle 3 sezioni II, III, IV: la corrente I_3 , la forza elettromotrice u , le costanti A e B relative al binario, per complessive $3 \times 4 = 12$ incognite;

- nella sezione V le costanti A e B del binario per complessive 2 incognite;

- ai confini tra una sezione e la successiva: la tensione LC/binario (esclusa quella al confine I/II che è nota in quanto pari a $-Z_s I_2$) per complessive 4 incognite.

Naturalmente anche le equazioni sono 18 e precisamente:

$$7(23), 1(24), 1(25), 3(26), 3(27) \text{ e } 3(31).$$

Ad una radicale semplificazione del calcolo si perviene però partendo dall'osservazione che nella relazione (31) il termine $\frac{mu}{Z_0}$ che rappresenta la corrente magnetizzante, è piccolo rispetto al termine mI_2 per cui, senza sensibile errore, anche I_3 può essere considerato uguale in tutte le sezioni. Ma a ciò consegue necessariamente che in tutti i collegamenti intermedi tra trefolo e binario (nel caso di fig. 7 ai confini II/III e IV/V) la corrente è nulla per cui i collegamenti stessi possono essere tolti dal modello senza alterare la situazione; e quindi tutte le sezioni intermedie si riducono ad un'unica sezione avente in serie tutti i trasformatori.

Si passa perciò al modello semplificato di fig. 8 che ha carattere generale, cioè vale per un numero qualsiasi di trasformatori inseriti tra l'alimentazione e il carico. Tenuto conto delle notazioni indicate in fig. 8, l'applicazione delle relazioni generali di Tab. 1, unitamente alle altre relazioni evidenziate direttamente dal

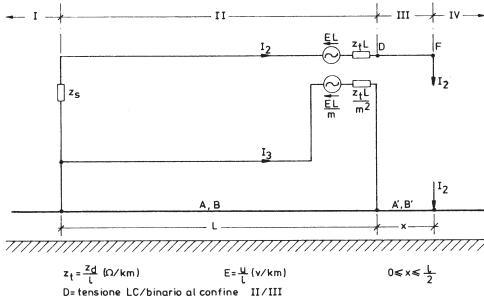


Fig. 8 - Modello elettrico semplificato per il calcolo del sistema di figura 5.

modello, fornisce le equazioni risolutive elencate in Tab. 3 nelle 8 incognite: I_3 , E, D, F, A, B, A', B'.

TABELLA 3

- 1) $D - EI_L = (Z_s + Z_t) I_2 + N_2 [A(1 - e^{IL}) - B(1 - e^{IL})] + L(M_{22} I_2 + M_{23} I_3)$
- 2) $0 - \frac{EL}{m} = \frac{Z_t}{m^2} I_3 + N_3 [A(1 - e^{IL}) - B(1 - e^{IL})] + L(M_{23} I_3 + M_{33} I_3)$
- 3) $D - F = N_2 [A'(1 - e^{-Ix}) - B'(1 - e^{-Ix})] + x M_{22}$
- 4) $2A = p_2 I_2 + p_3 I_3$
- 5) $2Ae^{-IL} - 2A' + p_3(0 - I_3) = 0$
- 6) $Ae^{-IL} - Be^{-IL} - A' + B' = 0$
- 7) $2B'e^{-Ix} = p_2 I_2$
- 8) $I_3 = -m I_2 - \frac{mu}{Z_0} = -m I_2 - m \frac{LE}{Z_0}$

L'osservazione che il secondo addendo della 8) di Tab. 3 (corrente a vuoto) è piccolo rispetto al primo permette anche un'ulteriore semplificazione della procedura di calcolo.

$$\text{Posto} \quad W = \frac{mLE}{Z_0 I_2} \quad (32)$$

la 8) di Tab. 3 si scrive

$$8') \quad I_3 = -I_2(m + W)$$

nella quale W è incognita, essendo incognita E , ma ha un valore piccolo rispetto a m . Pertanto, se si sviluppa il calcolo una prima volta nell'ipotesi che W sia zero, si otterrà già un quadro di risultati non lontano dal vero. Se poi, in base alla E così ricavata, s'introduce nella 8') il valore di W dato dalla (32) e si ripete il calcolo, si perverrà a risultati sufficientemente approssimati senza necessità di ulteriore iterazione (che comunque volendo si può sempre fare).

Il vantaggio di una tale procedura è che, se si considera W noto, la risoluzione del sistema delle equazioni di Tab. 3 può essere facilmente esplicitata. Attraverso opportune sostituzioni e passaggi algebrici che non si riportano, si ricava infatti:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A = I_2 [p_2 - p_3(m+W)] \\ 2B = I_2 [p_2 e^{jL} - p_3(m+W)] e^{-jL} \\ 2A' = I_2 [p_2 e^{-jL} + p_3(m+W)(1-e^{-jL})] \\ 2B' = I_2 p_2 e^{-jL} \end{array} \right.$$

e successivamente, posti

$$H = \frac{A(1-e^{-jL}) - B(1-e^{jL})}{I_2} = \frac{1-e^{-jL}}{2} [p_2(1+e^{jL}) - 2p_3(m+W)]$$

$$H' = \frac{A'(1-e^{-jL}) - B'(1-e^{jL})}{I_2} = \frac{1-e^{-jL}}{2} [p_2(1+e^{jL}) + p_3(m+W)(1-e^{-jL})]$$

si ottiene in definitiva, rispettivamente per S , tensione specifica dei succinti e per Z_{eq} impedenza equivalente della linea:

$$S = \frac{E}{I_2} = Z_i \left(1 + \frac{W}{m} \right) + m \left[M_{33}(m+W) - M_{22} - \frac{N_2 H}{L} \right] \quad (\text{Volt})$$

$$Z_{eq} = \frac{-F - Z_i f_2}{I_2(L+x)} = M_{22} + \frac{L}{L+x} [S + Z_i + N_2(H+H') - M_{23}(m+W)] \quad (\Omega)$$

La f.e.m. indotta sul generico conduttore "i" parallelo, è fornita dalla (29) e assume le seguenti espressioni:

$$\text{lungo la sezione II} \quad \frac{f}{I_2} = \frac{Z_{ii} H}{\delta} + L [M_{i2} - (m+W) M_{i3}] \quad (\frac{\text{V}}{\text{A}})$$

$$\text{lungo la sezione III} \quad \frac{f}{I_2} = \frac{Z_{ii} H'}{\delta} + x M_{i2} \quad (\frac{\text{V}}{\text{A}})$$

Ovviamente lo stesso procedimento si applica alla risoluzione del caso in cui il carico si trovi nella seconda metà di un tratto L .

9. Esempio di impostazione per il caso particolare del sistema monofase con alimentatore in opposizione di fase ed autotrasformatore.

Si suppone nota la configurazione di tale sistema e, a titolo di esempio, ci si riferisce al caso che il tratto di linea da considerare sia equipaggiato come rappresentato in fig. 9 (1 trasformatore di alimentazione con presa centrale e 3 autotrasformatori posti ad egual distanza L) e ci si propone, sempre a titolo di esempio di applicazione del metodo generale esposto, di effettuare il calcolo elettrico nell'ipotesi che il carico assegnato si trovi in una posizione generica compresa tra il 2° e il 3° autotrasformatore.

Per effettuare detto calcolo conviene usufruire del principio di sovrapposizione considerando la situazione di rete di fig. 9 come sovrapposizione delle seguenti situazioni:

1) Situazione base in cui il carico è assente e la rete è alimentata dalla tensione fornita dal trasformatore.

La risoluzione della rete in tali condizioni è immediata essendo tutte le correnti nulle mentre le tensioni tra LC e binario e tra alimentatore e binario sono costanti su tutta la linea e pari rispettivamente ai valori a vuoto V_o e $-V_o$.

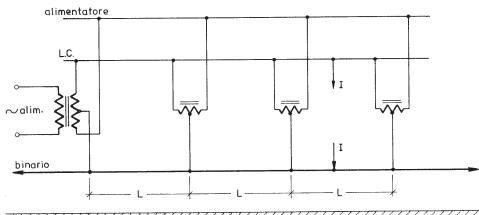


Fig. 9 – Sistema monofase con alimentatore in opposizione di fase ed autotrasformatore.

2) Situazione in cui dalla rete, tolto il generatore V_o , viene prelevata, tra linea di contatto e binario, la corrente di carico I .

Una volta determinate le correnti e le tensioni relative alla situazione 2 basta sommarle con quelle relative alla situazione 1 per avere la situazione risultante.

In realtà questo procedimento incontra una complicazione nel fatto che lo sfasamento α di I rispetto a V_o non è noto a priori, mentre è assegnato lo sfasamento φ di I rispetto alla tensione LC/binario risultante nel punto di prelievo, tensione però che è un risultato e non un dato del calcolo.

Per superare tale difficoltà conviene risolvere la rete nella situazione 2 nell'ipotesi che la assegnata corrente I sia puramente reale. Tale risoluzione fornirà per il punto di prelievo un valore complesso U_2 della tensione LC/binario $U_2 = U_2' + jU_2''$; per il principio di sovrapposizione la tensione effettiva nel punto stesso sarà:

$$U = U' + jU'' = V_o (\cos \alpha + j \sin \alpha) + U_2' + jU_2'', \quad \text{la quale}$$

si scinde nelle 2 relazioni

$$U' = V_o \cos \alpha + U_2'$$

$$U'' = V_o \sin \alpha + U_2''$$

dovendo essere d'altra parte lo sfasamento di U rispetto a I pari al valore assegnato φ , si ha in definitiva l'equazione

$$\frac{V_o \sin \alpha + U_2''}{V_o \cos \alpha + U_2'} = \tan \varphi$$

la cui risoluzione fornisce l'incognita α .

Ciò premesso il modello elettrico per la risoluzione della situazione 2 è quello rappresentato in fig. 10, e ad esso si applicano le relazioni generali di Tab. 1.

Le grandezze incognite sono 26 e precisamente:

– $a_2, a_3, b_2, b_3, c_2, c_3, d_2, d_3$ cioè le correnti nella LC e nell'alimentatore nelle diverse sezioni.

– $A_2, A_3, B_2, B_3, D_2, D_3, U_2, U_3, E_2, E_3$, cioè le tensioni, verso il binario, della LC e dell'alimentatore, nelle diverse sezioni.

– $a_A, a_B, b_A, b_B, c_A, c_B, d_A, d_B$, cioè le costanti relative alla corrente nel binario, per le diverse sezioni.

L'equazione (23) applicata alle singole sezioni e per il caso $n = 3$ cioè $h = 2,3$; $k = 2,3$, fornisce

$$1) A_2 - B_2 = N_2 [a_A(1-e^{-jL}) - a_B(1-e^{jL})] + (M_{22} a_2 + M_{23} a_3)L$$

$$2) A_3 - B_3 = N_3 [a_A(1-e^{-jL}) - a_B(1-e^{jL})] + (M_{32} a_2 + M_{33} a_3)L$$

$$3) B_2 - D_2 = N_2 [b_A(1-e^{-jL}) - b_B(1-e^{jL})] + (M_{22} b_2 + M_{23} b_3)L$$

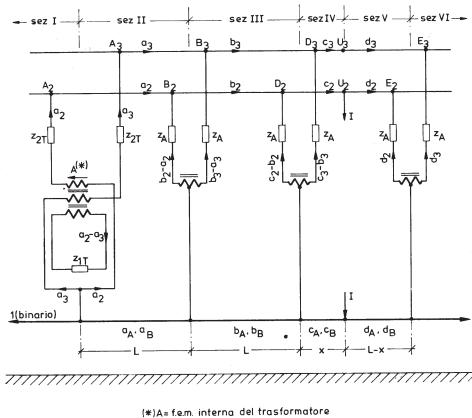


Fig. 10 – Modello elettrico del calcolo del sistema di figura 9.

4) $B_3 - D_3 = N_3 [b_A(1 - e^{-\frac{R}{L}}) - b_B(1 - e^{-\frac{R}{L}})] + (M_{32} b_2 + M_{33} b_3)L$

5) $D_2 - U_2 = N_2 [c_A(1 - e^{-\frac{R}{L}}) - c_B(1 - e^{-\frac{R}{L}})] + (M_{22} c_2 + M_{23} c_3)L$

6) $D_3 - U_3 = N_3 [c_A(1 - e^{-\frac{R}{L}}) - c_B(1 - e^{-\frac{R}{L}})] + (M_{32} c_2 + M_{33} c_3)L$

7) $U_2 - E_2 = N_2 [d_A(1 - e^{-\frac{R}{L-x}}) - d_B(1 - e^{-\frac{R}{L-x}})] + (M_{22} d_2 + M_{23} d_3)(L-x)$

8) $U_3 - E_3 = N_3 [d_A(1 - e^{-\frac{R}{L-x}}) - d_B(1 - e^{-\frac{R}{L-x}})] + (M_{32} d_2 + M_{33} d_3)(L-x)$

Le equazioni (24), (25), (26), (27) applicate a ciascun confine di sezione forniscono

9) $2a_A = a_2 p_2 + a_3 p_3$

10) $2a_A e^{\frac{R}{L}} - 2b_A + (b_2 - a_2)p_2 + (b_3 - a_3)p_3 = 0$

11) $a_A e^{\frac{R}{L}} - a_B e^{\frac{R}{L}} - b_A + b_B = 0$

12) $2b_A e^{\frac{R}{L}} - 2c_A + (c_2 - b_2)p_2 + (c_3 - b_3)p_3 = 0$

13) $b_A e^{\frac{R}{L}} - b_B e^{\frac{R}{L}} - c_A + c_B = 0$

14) $2c_A e^{\frac{R}{L}} - 2d_A + (d_2 - c_2)p_2 + (d_3 - c_3)p_3 = 0$

15) $c_A e^{\frac{R}{L}} - c_B e^{\frac{R}{L}} - d_A + d_B = 0$

16) $2d_B e^{\frac{R}{L-x}} = d_2 p_2 + d_3 p_3$

Condizioni imposte dal trasformatore di alimentazione

Si ha (vedi fig. 10):

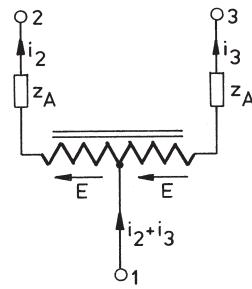
$$\begin{cases} A_2 = A - Z_{21}a_2 \\ A_3 = -A - Z_{21}a_3 \\ A = -Z_{11}(a_2 - a_3) \end{cases}$$

da cui, eliminando A:

17) $A_2 = -Z_{11}(a_2 - a_3) - Z_{21}a_2$

18) $A_3 = -Z_{11}(a_3 - a_2) - Z_{21}a_3$

Condizioni imposte dagli autotrasformatori



$E = \text{f.e.m. interna}$

Fig. 11 – Schema equivalente di un autotrasformatore.

Considerando lo schema equivalente di un autotrasformatore generico (rapporto 2:1, fig. 11), l'equilibrio delle amperspire impone $i_2 = i_3$. Inoltre:

$$\begin{cases} V_{21} = E - Z_A i_2 \\ V_{31} = -E - Z_A i_3 \end{cases}$$

che, sommate, forniscono:

$V_{21} + V_{31} = -Z_A i_2 - Z_A i_3 = -2Z_A i_2$

per cui

19) $b_2 - a_2 = b_3 - a_3$

20) $B_2 + B_3 = -2Z_A(b_3 - a_3)$

21) $c_2 - b_2 = c_3 - b_3$

22) $D_2 + D_3 = -2Z_A(c_3 - b_3)$

23) $-d_2 = -d_3$

24) $E_2 + E_3 = 2Z_A d_3$

In corrispondenza del carico si ha

25) $d_3 = c_3$

26) $c_3 = I * d_2$

In definitiva si sono scritte 26 equazioni, cioè tante quante sono le incognite da determinare.

La semplicità di alcune equazioni conduce ad eliminare, per sostituzioni, alcune equazioni ed incognite:

– la 19a), 21a), 23a), 25a), e 26a) conducono immediatamente alle seguenti sostituzioni:

$d_3 = c_3 ; d_2 = c_3 ; c_2 = c_3 + I ; b_2 = b_3 + I ; a_2 = a_3 + I$

| TABELLA 4 |
|---|
| 1) $-(Z_{11}+Z_{21})I - Z_{21}a_2 - B_2 = N_2[a_A(1-e^{-xL}) - a_B(1-e^{-yL})] + [(M_{22}+M_{23})a_3 + M_{22}I]L ;$ |
| 2) $Z_{11}I - Z_{21}a_3 - B_3 = N_3[a_A(1-e^{-yL}) - a_B(1-e^{-xL})] + [(M_{32}+M_{33})a_3 + M_{32}I]L ;$ |
| 3) $B_2 - D_2 = N_2[b_A(1-e^{-xL}) - b_B(1-e^{-yL})] + [(M_{22}+M_{23})b_3 + M_{22}I]L ;$ |
| 4) $B_3 - D_3 = N_3[b_A(1-e^{-yL}) - b_B(1-e^{-xL})] + [(M_{32}+M_{33})b_3 + M_{32}I]L ;$ |
| 5) $D_2 - U_2 = N_2[c_A(1-e^{-xL}) - c_B(1-e^{-yL})] + [(M_{22}+M_{23})c_3 + M_{22}I]x ;$ |
| 6) $D_3 - U_3 = N_3[c_A(1-e^{-yL}) - c_B(1-e^{-xL})] + [(M_{32}+M_{33})c_3 + M_{32}I]x ;$ |
| 7) $U_2 - E_2 = N_2[d_A(1-e^{-(xL-x)}) - d_B(1-e^{-(yL-x)})] + (M_{22}+M_{23})c_3(L-x) ;$ |
| 8) $U_3 + E_2 - 2Z_Ac_3 = N_3[d_A(1-e^{-(yL-x)}) - d_B(1-e^{-(xL-x)})] + (M_{32}+M_{33})c_3(L-x) ;$ |
| 9) $B_2 + B_3 = -2Z_A(b_3 - a_3) ;$ |
| 10) $D_2 + D_3 = -2Z_A(c_3 - b_3) ;$ |
| 11) $2a_A = (a_3 + I)p_2 + a_3p_3 = a_3(p_2 + p_3) + I p_2 ;$ |
| 12) $2a_Ae^{-xL} - 2b_A + (b_3 - a_3)(p_2 + p_3) = 0 ;$ |
| 13) $a_Ae^{-xL} - a_Be^{-yL} - b_A + b_B = 0 ;$ |
| 14) $2b_Ae^{-yL} - 2c_A + (c_3 - b_3)(p_2 + p_3) = 0 ;$ |
| 15) $b_Ae^{-xL} - b_Be^{-yL} - c_A + c_B = 0 ;$ |
| 16) $2c_Ae^{-yL} - 2d_A + (c_3 - c_2)p_2 = 2c_Ae^{-yL} - 2d_A - Ip_2 = 0 ;$ |
| 17) $c_Ae^{-yL} - c_Be^{-xL} - d_A + d_B = 0 ;$ |
| 18) $2d_Be^{-xL} = c_3(p_2 + p_3) .$ |

Si può anche eliminare E_3 con la sostituzione fornita dalla 24^{a)}

$$E_3 = 2Z_Ac_3 - E_2$$

La 17^a e la 18^a si scrivono

$$\begin{aligned} A_2 &= -Z_{11}I - Z_{21}(a_3 + I) = -(Z_{11} + Z_{21})I - Z_{21}a_3 \\ A_3 &= Z_{11}I - Z_{21}a_3 \end{aligned}$$

per cui si eliminano anche A_2 e A_3 .

In definitiva il sistema di equazione risolutivo è costituito dalle 18 equazioni complesse elencate nella Tab. 4 nelle 18 incognite complesse $a_3, b_3, c_3, B_2, B_3, D_2, D_3, U_2, U_3, E_2, a_A, a_B, b_A, b_B, c_A, c_B, d_A, d_B$.

Ovviamente, nel caso che il carico sia situato in un'altra sezione o che il numero di sezioni sia diverso, la procedura d'impostazione è la stessa e conduce comunque ad un sistema risolutivo analogo a quello di cui sopra, con un numero di equazioni evidentemente diverso caso per caso.

BIBLIOGRAFIA

DIRECTIVES DU CCITT concernant "La protection des lignes de télécommunication contre les actions nuisibles des lignes électriques" – Ediz. 1983 e successivi aggiornamenti.

Gruppo di Studio Ferrovie dello Stato – Industria – "L'elettrificazione a 50 Hz – 25 kV della linea dorsale Sarda", 1978.

A. CAPASSO, S. LA ROSA – "Elettrificazione monofase 25 kV – 50 Hz. Osservazioni sul calcolo del sistema elettrico" Ingegneria Ferroviaria, maggio 1979.

E. CLAXTON, B. SANDHAM – "System design for 50 Hz a.c. electrification" – Proc. IEE vol. 119, n. 2 – 1972.

J.R. TIERNEY, B.H. GROSS – "Telecommunication system in relation to 50 Hz a.c. electric traction" – Proc. IEE vol. 124, n. 4 – 1972.

RAILWAY Electrification Association – "Rapport du Comité d'Etude sur le Système d'alimentation simple en courant alternatif" n. 76 – 19 (1977), n. 77 – 17 (1978), n. 78 – 17 (1979).

| Sommaire | Summary | Zusammenfassung |
|--|--|--|
| ETABLISSEMENT GENERAL DU CALCUL ELECTRIQUE DES LIGNES DE CONTACT DE LA TRACTION A COURANT ALTERNATIF | GENERAL LAYOUT OF THE ELECTRICAL CALCULATION OF CONTACT LINES FOR ALTERNATING CURRENT TRACTION | GESAMTAUFPSTELLUNG DER ELEKTRISCHEN BERECHNUNG VON WECHSELSTROMFAHRLEITUNGEN |
| On expose un procédé général pour le calcul électrique des lignes de contact à courant alternatif en tenant compte de la dispersion de la voie vers la terre, y compris le calcul des forces électromotrices longitudinales induites sur des conducteurs parallèles adjacents. | An illustration is given of a general procedure for the electrical calculation of alternating current contact lines, taking account of track earth dispersion, including the calculation of the longitudinal electromotive forces induced in adjacent parallel conductors. | Es wird ein allgemeines Verfahren für die elektrische Berechnung der Fahrleitungen mit Wechselstrom dargelegt, mit Rücksicht auf den Stromverlust des Gleises zur Erde. Es wird dabei auch die Berechnung der induzierten elektromotorischen Längskräfte auf den anliegenden Parallelleitungen durchgeführt. |
| On illustre l'application à la traction à courant alternatif monophasé même pour le cas du système pourvu de transformateurs suiveurs et du système avec ligne d'alimentation en opposition de phase et autotransformateurs. | The application to single phase alternating current traction is also illustrated for the case of a system equipped with sucking transformers and a system with feeders in phase opposition and autotransformers. | Dargestellt wird die Anwendung auf den Einphasen-Wechselstromantrieb auch mit dem System der Saugtransformatoren und mit dem des Speisegeräts in Gegenphase und der Spartransformatoren. |