



Sviluppo di una procedura di validazione di modelli agli elementi finiti ridotti

Development of a procedure for reduced finite-element models validation

Dott. Ingg. A. BARONI^(*), G. SAPORITO^(**),
M. ROMANI^(**), M. GRAZZINI^(**)

SOMMARIO – Nel processo di integrazione di un corpo flessibile all'interno di un sistema multi-corpo un passo molto critico è rappresentato dalla riduzione del modello agli elementi finiti del componente utilizzato in fase progettuale per analisi tensionali dettagliate. Per tale ragione un processo di validazione del modello ridotto è stato pensato, sviluppato ed implementato sulla base di una procedura analitica. Tale procedura garantisce un completo controllo della riduzione del modello agli elementi finiti tale da poter ottimizzare la tecnica di riduzione utilizzata ed allo stesso tempo quantificare il livello di correlazione esistente tra il modello ridotto rispetto a quello di partenza.

Tale procedura di validazione è stata sviluppata utilizzando il DMAP (Direct Matrix Abstraction Program) di MSC NASTRAN in combinazione con il più comune linguaggio di alto livello del "user-friendly" software MATLAB (rif. [6]).

1. Introduzione

Con l'avvento di processori di calcolo sempre più performanti nella moderna progettazione ferroviaria hanno assunto una importanza fondamentale le tecniche di analisi dinamica con modelli multi-corpo come supporto alla progettazione del veicolo in fase concettuale. Tuttavia la realizzazione in fase di progettazione di un modello multi-corpo per analisi dinamiche comporta sempre delle semplificazioni che mirano a conciliare le opposte esigenze di ottenere risultati attendibili e di minimizzare i tempi di calcolo e sono insite nella schematizzazione di un sistema fisico tramite strumenti matematici.

Ad oggi la possibilità di schematizzare corpi flessibili, ovvero deformabili, rappresenta un decisivo miglioramento.

SUMMARY – During the process of integration of a flexible body into a multi-body system, the reduction of the finite-element model of the component used in the design stage for detailed stress analyses is a very critical step. For this reason, a validation process of the reduced model has been conceived, developed and implemented on the basis of an analytical procedure. Such procedure ensures complete control on the finite-element model reduction, in order to optimize the reduction technique applied and, at the same time, to quantify the level of correlation between the reduced model and the original one.

The validation procedure has been developed with the software DMAP (Direct Matrix Abstraction Program) by MSC NASTRAN, in combination with the more popular high-level programming language of the "user-friendly" software MATLAB (ref. [6]).

1. Introduction

With the upcoming of ever performing computer processors, multi-body dynamic analysis techniques have reached great importance in modern railway industry as a fundamental tool for the early conceptual stage of the vehicle design. Nevertheless, the development of a multi-body model for dynamic analyses must satisfy the trade-off between the achievement of reliable results and, on the other hand, the reduction of the computational time: these two opposing needs always arise when a physical system is schematized with mathematical tools.

So far, the opportunity to schematize flexible (i.e. deformable) bodies results in a significant improvement of the mathematical model, especially in those numerical simulations where the deformability of the components plays a master role (e.g. wagon flexibility for comfort

^(*) Università degli studi di Pisa, Dip. di Ingegneria Aerospaziale "L. Lazzarino".

^(**) AnsaldoBreda S.p.a., Pistoia.

^(*) Università degli studi di Pisa, Dip. di Ingegneria Aerospaziale "L. Lazzarino", Pisa, Italy.

^(**) AnsaldoBreda S.p.a., Pistoia, Italy.

to del modello soprattutto per quelle simulazioni numeriche del veicolo nelle quali la deformabilità dei componenti gioca un ruolo determinante (e.g. flessibilità della cassa per analisi di comfort, carrello deformabile per la definizione delle condizioni di carico ed analisi degli stati tensionali in condizioni limite).

Il software ampiamente utilizzato in campo ferroviario per analisi multi-corpo è SIMPACK il quale permette l'integrazione di corpi flessibili per mezzo di un approccio modale, ovvero il campo di deformabilità del componente è rappresentato da una combinazione di modi pre-calcolati per mezzo dei comuni codici di calcolo per analisi agli elementi finiti (rif. [6]). I modi vengono scelti sulla base di una ben definita banda di frequenze di interesse la quale dipende dalla dinamica del componente all'interno del sistema multi-corpo.

Nel processo, che porta alla schematizzazione del corpo flessibile all'interno del sistema veicolo, vengono utilizzate tre interfacce diverse: un codice per le analisi agli elementi finiti, il SIMPACK ed un programma intermedio denominato FEMBS (Finite Element Multi-Body System), che interfaccia i due applicativi precedenti. Da un punto di vista concettuale l'intero processo, il quale deve essere effettuato per ciascun componente che si vuole schematizzare come flessibile all'interno del sistema veicolo, è ben definito e può essere riassunto secondo i seguenti quattro passi:

- 1 – realizzazione di un modello dettagliato agli elementi finiti del componente che si vuole schematizzare come flessibile all'interno del sistema veicolo. Per comodità e tempo, di solito vengono sfruttati gli stessi modelli utilizzati per le verifiche strutturali del componente in analisi;

- 2 – calcolo dei modi di risonanza del componente all'interno di una banda di frequenza definita sulla base delle forzanti agenti sul componente stesso nel sistema veicolo;

- 3 – manipolazione dei modi calcolati e delle matrici di massa e rigidità del modello, per mezzo del tool aggiuntivo denominato FEMBS, al fine di predisporre una schematizzazione del corpo compatibile con il codice SIMPACK;

- 4 – implementazione del corpo flessibile all'interno del sistema veicolo.

Per requisiti di natura computazionale sia del programma di interfaccia FEMBS, ma anche di gestione dell'intero modello del veicolo all'interno del codice SIMPACK, il modello agli elementi finiti del componente deve essere ridotto ad una dimensione dell'ordine del centinaio dei gradi di libertà (GdL), rispetto alle dimensioni di partenza, che di solito sono dell'ordine delle centinaia di migliaia di GdL. Tale processo di riduzione, che si colloca tra i punti 1 e 2 del processo sopra descritto, determina una perdita di informazione dal modello agli elementi finiti di partenza; tale perdita di informazioni può essere più o

analyses, deformable bogie-frame in order to determine the load-distribution to perform the stress analyses in exceptional and/or normal service conditions).

A widespread software for multi-body analyses in railway industry is SIMPACK, which allows the integration of flexible bodies with a modal approach; the deformability field of the component is obtained as a combination of modes which are pre-calculated by means of a common finite-elements commercial code (ref. [6]). Those modes are chosen on the basis of a particular frequency range of interest, which depends on the dynamics of the component within the multi-body system.

Three different interfaces are used for the process that leads to the schematization of a flexible body into the vehicle system: a finite-elements code, SIMPACK and an intermediate software called FEMBS (Finite Elements Multi-Body System), which is the interface between the formers. By a conceptual point of view, the whole process (which must be carried out for each flexible component implemented in the vehicle system) is fully defined and can be summarized in the following four steps:

- 1 – carrying out of a detailed finite-element model of the component which must be schematized as flexible into the vehicle system (starting model). For convenience, the same model built up for the structural verification of the component is usually utilized;

- 2 – computation of the eigen-modes of the component in a frequency range defined by means of the load-spectrum acting on the component itself;

- 3 – elaboration of the computed eigen-modes and the mass/stiffness matrices of the model by means of the tool called FEMBS, in order to obtain a schematization of the component consistent with the SIMPACK code;

- 4 – implementation of the flexible body within the vehicle system.

For both computational feasibility within FEMBS interface and easy model management within SIMPACK code, the finite-elements model of the component must be reduced to a size of hundreds of degrees of freedom (DoF), whereas the starting model could usually count hundreds of thousands of DoF. Such reduction is performed between steps 2 and 3 of the process described above and causes the starting model to lose a certain amount of information; the loss of information can be more or less relevant and it represents a critical point within the whole process if no means are available in order to quantify the level of correlation between the starting model (which is considered to be more consistent with the actual behaviour of the component) and the reduced model (which is used to schematize the flexible component into the vehicle model).

In the past, the level of correlation between the two models was determined by visual comparison of their eigen-modes; however, this procedure shows remarkable disadvantages, namely:

meno rilevante e rappresenta un punto critico nell'intero processo se non si è in possesso di uno strumento per quantificare la correlazione esistente tra il modello agli elementi finiti di partenza (considerato come la descrizione più conforme al comportamento reale del componente), ed il modello ridotto (utilizzato per la schematizzazione del componente come flessibile nel sistema veicolo).

In passato tale verifica di correlazione esistente tra i due modelli veniva effettuata per mezzo di una verifica visiva dei modi di risonanza ottenuta tra i due modelli (modello completo vs. modello ridotto), ma tale procedura aveva notevoli svantaggi quali:

- tempo eccessivo;
- dipendente dalla capacità visiva ed esperienza dell'utente nel confrontare i modi dei due modelli;
- non permette di quantificare numericamente la correlazione tra i due modelli.

Per tali motivi ed al fine di garantire un processo veloce ed indipendente dalle capacità dell'utente, si è resa quindi necessaria la realizzazione di una procedura automatica sulla base di concetti analitici.

2. Tecniche di riduzione

Le tecniche di riduzione per un modello di n -dimensioni, con n pari al numero dei gradi di libertà del modello agli elementi finiti, sono nate per ridurre le dimensioni del modello cercando di perdere il minor numero di informazioni possibile nel passaggio da n a m -dimensioni, con $m < n$. La tecnica di riduzione consiste nell'ottenimento di matrici di massa e rigidità ridotte di dimensioni $m \times m$.

$$\begin{cases} K_{nn} \Rightarrow K_{mm} \\ M_{nn} \Rightarrow M_{mm} \\ m < n \end{cases}$$

Le matrici ridotte ed il vettore ridotto degli spostamenti nodali, si ottengono attraverso un processo di pre-moltiplicazione e post-moltiplicazione con la matrice di trasformazione, G_{nm} . Si ha:

$$\begin{cases} u_n = G_{nm} u_m \\ M_{mm} = G_{nm}^T M G_{nm} \\ K_{mm} = G_{nm}^T K G_{nm} \end{cases}$$

La matrice di trasformazione esprime il legame diretto tra i GdL del sistema completo e quello ridotto. Da notare come applicando la trasformazione inversa è possibile espandere di nuovo il sistema alle dimensioni iniziali; per questo motivo i gradi di libertà del sistema ridotto vengono definiti come gradi di libertà "Master". Ovviamente nel caso si sia risolta una particolare analisi del sistema ridotto, quale analisi modale o analisi statica, il vettore espanso degli spostamenti nodali è fortemente influenzato dalla tecnica di riduzione applicata e dalla mo-

- time expensive;
- dependent on user's experience and visual skills;
- unable to quantify numerically the level of correlation between the two models.

For these reasons, an automatic procedure based on analytical concepts is necessary in order to save time and to make the process independent from the user's skills.

2. Reduction techniques

Reduction techniques for n -dimensions models (where n is the number of DoF of the finite-elements model) have been developed in order to lose the minimum amount of information when the model is reduced from n to m -dimensions, being $m < n$. The reduction technique allows to obtain reduced mass and stiffness matrices ($m \times m$ size).

$$\begin{cases} K_{nn} \Rightarrow K_{mm} \\ M_{nn} \Rightarrow M_{mm} \\ m < n \end{cases}$$

The reduced matrices along with the nodal displacements reduced vector are obtained by pre-multiplication and post-multiplication with the transformation matrix, G_{nm} . It can be written as:

$$\begin{cases} u_n = G_{nm} u_m \\ M_{mm} = G_{nm}^T M G_{nm} \\ K_{mm} = G_{nm}^T K G_{nm} \end{cases}$$

The transformation matrix describes the relation between the DoFs of the complete model and the reduced one. The model is brought back to its original size by applying the inverse transformation; for this reason, the degrees of freedom of the reduced system are defined "Master" DoFs. Obviously, when a particular analysis of the reduced system has been solved (e.g. static or modal analysis), the expanded nodal displacements vector is strongly dependent on the reduction technique applied and the way it was defined; the more the expanded displacement vector is similar to the displacement vector of the complete model, the more the reduced model is a good approximation of the complete model for the analysis concerned.

Many condensation techniques are showed in literature, the most famous of which are the static, or Guyan, reduction (ref. [2]) and the dynamic, or Craig-Bampton reduction (ref. [3]): both the techniques are already implemented in the MSC NASTRAN solver.

In the static reduction the transformation matrix is defined only by means of the stiffness matrix of the complete model, K_n . The reduction technique derives from the static equilibrium which involves the stiffness of the component and the external loads, P . The nodal displacements vector u_n and the stiffness matrix can be expressed in

dalità con cui questa è stata definita; tanto più il vettore degli spostamenti ottenuto dall'analisi del modello ridotto e poi espanso, è simile a quello ottenuto dall'analisi del modello completo, tanto più il modello ridotto è una buona approssimazione di quello completo per quel particolare tipo di analisi.

In letteratura esistono molte tecniche di condensazione tra cui le due più famose sono la riduzione statica, o di Guyan (rif. [2]), e la riduzione dinamica, o di Craig-Bampton (rif. [3]), le quali sono già implementate nel software MSC NASTRAN.

Nella riduzione statica la matrice di trasformazione è definita sulla base solo della matrice di rigidezza del modello di partenza, K_o . La tecnica di riduzione si basa sull'equilibrio statico tra la rigidezza del componente ed i carichi esterni, P . Esplicitando il vettore degli spostamenti nodali, u_n , e la matrice di rigidezza rispetto a quelli omessi u_o , ed a quelli Master, la matrice di trasformazione è definita come segue:

$$K_e \cdot u_n = \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{om} \\ K_{mo} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_m \end{Bmatrix} \Rightarrow G_{nm} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{om} \\ I_{mm} \end{bmatrix}$$

dove con I_{mm} si è indicata una matrice identità di dimensioni $m \times m$. Invece, nella riduzione dinamica si tiene conto anche della matrice di massa in quanto la trasformazione è definita sulla base dell'equilibrio dinamico del componente (nella definizione della matrice di trasformazione si sfrutta anche una analisi modale).

$$\begin{bmatrix} M_{oo} & M_{om} \\ M_{mo} & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_o \\ \ddot{u}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{om} \\ K_{mo} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_m \end{Bmatrix}$$

In questa tecnica di riduzione i gradi di libertà Master vengono suddivisi in gradi di libertà fisici del sistema, definiti gradi di libertà al bordo, u_b , e gradi di libertà dinamici, u_d . Questa riduzione è molto complessa e si articola, a differenza della precedente, in diverse operazioni algebriche (quindi da un punto di vista computazionale è molto più pesante rispetto alla tecnica precedente). Nella procedura di trasformazione si astrae dal senso fisico spaziale dei gradi di libertà, in quanto i gradi di libertà dinamici rappresentano delle coordinate lagrangiane dipendenti solo dal tempo che non hanno un reale senso fisico nel modello di partenza. Per chiarire quali informazioni vengono perse dal modello applicando queste tecniche di riduzione si riporti l'esempio di una trave.

Il modello di partenza della trave è composto da 10 elementi ed 11 nodi (fig. 1); assumendo per ciascun nodo tre gradi di libertà, ovvero i due traslazionali ed il rotazionale, si ottiene un totale di 33 GdL per l'intero modello. La varietà dei campi deformativi rappresentabili dal modello è dato dalla combinazione lineare di 33 modi deformativi, definiti modi di vincolo Φ_c , i quali sono linearmente indipendenti uno rispetto all'altro. Questi modi deformativi, i quali formano da un punto di vista geometrico la base vettoriale di ciascun campo deformabile descrivibile dal mo-

del di omessi e Master nodal displacements (u_o and u_m , respectively), so that the transformation matrix can be defined as follows:

$$K_e \cdot u_n = \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{om} \\ K_{mo} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_m \end{Bmatrix} \Rightarrow G_{nm} = \begin{bmatrix} -K_{oo}^{-1}K_{om} \\ I_{mm} \end{bmatrix}$$

where I_{mm} is the $m \times m$ identity matrix.

Instead, the dynamic reduction takes into account also the mass matrix, because the transformation derives from the dynamic equilibrium of the component (a modal analysis is used also in the definition of the transformation matrix).

$$\begin{bmatrix} M_{oo} & M_{om} \\ M_{mo} & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_o \\ \ddot{u}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{om} \\ K_{mo} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_m \end{Bmatrix}$$

A distinction is made in this reduction technique between physical DoFs of the system, also called boundary DoFs, u_b , and dynamic DoFs, u_d . The dynamic reduction is a very complex technique and, unlike the static reduction, articulates in several algebraic operations, then from a computational point of view it is heavier than the latter one. In the transformation procedure, the physical spatial meaning of the DoFs is considered abstractly, because the dynamic DoFs only represent time-dependent lagrangian coordinates which have not any real physical meaning in the starting model. The example of a beam given here under explains better which information is lost in the model after the application of the reduction techniques.

The starting model of the beam is composed by 10 elements and 11 nodes (fig. 1); making the assumption of three DoFs for each node (two translations and one rotation), a total number of 33 DoFs is counted for the whole

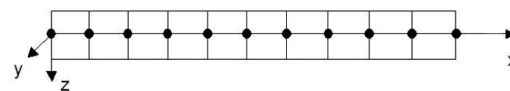


Fig. 1 - Modello agli elementi finiti di una trave ottenuto per mezzo di 10 elementi ed 11 nodi. A 10-elements and 11-nodes finite-elements model of a beam.

del. Such a model can describe a deformation field performable by a linear combination of 33 deformation modes, defined as constraint modes Φ_c , which are linearly independent with one to another. From a geometrical point of view, those deformation modes build the vectorial base for each deformation field performable by the model and are obtained assuming a unitary displacement at each degree of freedom (one at a time) while blocking all the remaining DoFs.

Let's now reduce the model with a static reduction. The rotation of both nodes at the extremities of the beam and the displacement along the z-axis of the middle node are chosen as Master DoFs, see fig. 2. With this reduction,

dello, si ottengono fissando di volta in volta uno spostamento unitario per ciascun grado di libertà del modello e bloccando tutti gli altri.

Adesso si riduca il modello di partenza applicando la riduzione statica. Si scelgono come GdL Master quelli associati alla rotazione dei nodi di estremità del modello ed allo spostamento lungo l'asse z del nodo posizionato sull'asse di simmetria (fig. 2). Applicando tale riduzione, la varietà dei campi deformativi è pari alla combinazione lineare dei 3 modi di vincolo associati ai gradi di libertà mantenuti dal modello ridotto (fig. 3).

Risulta subito evidente come il modello ridotto funzioni comunque molto bene rispetto a quello di partenza, per la descrizione del campo deformativo della trave nel caso si applichi un carico verticale in corrispondenza dell'asse di simmetria. Di contro, tale modello non risulta efficiente per la descrizione di un qualsiasi altro campo deformativo associato ad una condizione di carico verticale non in corrispondenza dell'asse di simmetria.

Si riduca ora il modello di partenza applicando la riduzione dinamica. Si scelgono come GdL Master i 3 utilizzati per la riduzione precedente ed un grado di libertà dinamico, per un totale di 4 GdL Master. La descrizione del campo deformativo del modello ridotto è ottenuta per mezzo dei 3 modi di vincolo associati ai GdL "fisici" ed un modo di risonanza, Φ_H (fig. 4). Tale auto-modo è ottenuto effettuando un'analisi modale del modello di partenza, con i GdL Master "fisici" bloccati. Nell'esempio in esame, per quanto riguarda la bontà del campo deformativo del modello ridotto dinamicamente si può far riferimento alle considerazioni già effettuate per il modello ridotto staticamente.

Nel caso invece si debba descrivere il campo deformativo del componente in una condizione di carico dinamica, dove il campo deformativo non dipende solo dai carichi esterni ma anche dai carichi inerziali dovuti alla distribuzione di massa nel componente, la riduzione dinamica, a parità di GdL Master, risulta più efficiente di quella statica.

Con la riduzione dinamica, l'informazione relativa alla distribuzione di massa del componente viene "cattura-

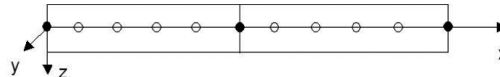


Fig. 2 - Definizione dei GdL Master per effettuare una riduzione statica. Il modello ridotto avrà 3 GdL Master DoFs as a result of a static reduction.

the diversity of deformation fields is given by the linear combination of the three modes associated with the degrees of freedom of the reduced model (fig. 3).

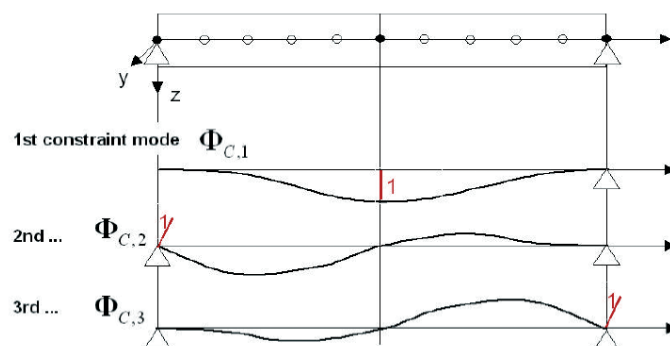


Fig. 3 - Modi di "vincolo" del modello ridotto staticamente. I modi di vincolo sono ottenuti applicando uno spostamento unitario a ciascun GdL Master (uno alla volta), e tenendo fissi tutti gli altri. Constraint modes for a statically reduced model. Constraint modes are obtained imposing a unitary displacement at each Master DoF (one at a time) while blocking all the remaining.

symmetry.

Let's now apply a dynamic reduction. A dynamic DoF is added to the set of 3 Master DoFs chosen previously, for a total number of 4 Master DoFs. The description of the deformation field of the reduced model is now obtained by means of the 3 constraint modes associated with the "physical" DoFs and a resonance mode, Φ_H (fig. 4). Such eigen-mode is calculated with a modal analysis of the original model, while taking the "physical" Master DoFs blocked. Concerning the quality of the deformation field of the dynamically reduced model, the same considerations apply as in the case of static reduction.

Instead, should the component be subjected to a dynamic load (where the deformation field is function not only of the external loads but also of the inertial loads due to the mass distribution within the component), the dynamic reduction is more efficient than the static one, the Master DoFs being equal.

With the dynamic reduction the information concerning the mass distribution is "captured" by the resonance modes, beyond the particular choice of the physical Master DoFs. On the contrary, in order to obtain good results with the static reduction, particular care should be taken in the choice of Master DoFs: the degrees of freedom,

It can be noticed that the reduced model is a good approximation for the deformation field of the original model when a vertical load is applied in the middle of the beam. On the contrary, such model lacks in efficiency in the description of any deformation field due to a vertical load not in correspondence of the axis of

ta" per mezzo dei modi di risonanza, al di là della scelta dei GdL Master fisici scelti dall'utente. Invece per ottenere gli analoghi buoni risultati con la riduzione statica, l'utente avrebbe dovuto porre particolare attenzione nella scelta dei GdL Master: ovvero avrebbe dovuto scegliere come GdL Master quelli a cui sono associate le zone del componente con maggiori caratteristiche in termini di massa, inerzia e rigidità.

Concludendo si fa notare come la scelta del numero, del tipo e della posizione dei GdL Master e della tecnica di riduzione concorra alla bontà del modello ridotto rispetto al modello di partenza. Da qui l'importanza della procedura di validazione del modello ridotto, al fine di verificare le scelte adottate dall'utente.

In NASTRAN è possibile applicare, per mezzo di standard routine di calcolo per l'analisi modale di un modello (SOL 103), questi due tipi di riduzione, andando a definire il set di gradi di libertà Master che comporranno il modello ridotto agli elementi finiti. Con la dicitura "SOL 103" si identificano sinteticamente in NASTRAN tutte quelle serie di operazioni algebriche necessarie all'esecuzione dell'analisi modale del modello; Per esempio, con la dicitura "SOL 101", si identificano tutte le operazioni algebriche necessarie all'esecuzione di una analisi statica del modello.

3. Procedura analitica

La procedura di validazione (fig. 5), si basa sulla possibilità di poter quantificare la correlazione esistente tra il modello ridotto e quello completo nella banda di frequenze di interesse; tale procedura sfrutta come base l'analisi modale di entrambi i modelli, completo e ridotto, in quanto per mezzo di questa è possibile caratterizzare il comportamento complessivo dei modelli in termini di matrice di massa, matrice di rigidità e comportamento dinamico del componente.

La validazione analitica si articola in tre passi:

- 1 – valutazione della correlazione di forma degli automodali dei due modelli;
- 2 – valutazione del comportamento dinamico degli automodali di forma simile;
- 3 – sintesi di un indice globale di correlazione dei due modelli nella banda di frequenze di interesse.

La valutazione della correlazione di forma degli autovettori ottenuti dall'analisi modale del modello completo con quelli espansi ottenuti dall'analisi modale del model-

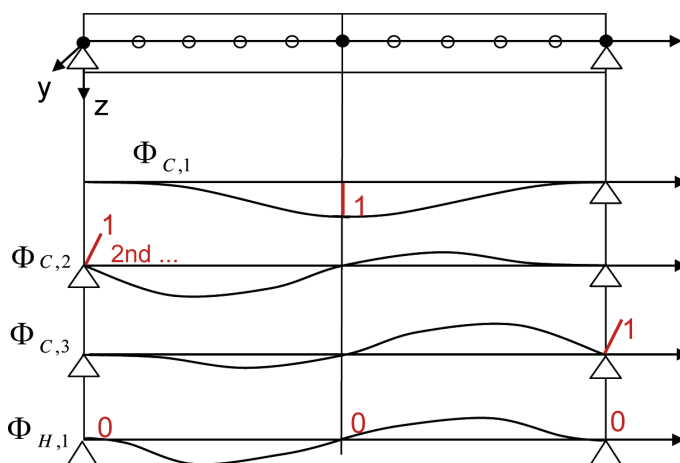


Fig. 4 - Modi di "vincolo" e modo di risonanza del modello ridotto dinamicamente. *Constraint modes and resonance mode in a dynamically reduced model.*

which are associated with portions of the components where mass, inertia and stiffness characteristics are higher, should be chosen.

In conclusion of this section, it is worth highlighting how is significant the choice of the number, the type and the location of Master DoFs, along with the influence of the reduction technique on the quality of the reduced model. For the considerations above, it is important to have a validation procedure for the reduced model, in order to verify the choices made by the user.

Once the set of Master DoFs composing the reduced model is defined by the user, both the static and dynamic reductions are available in NASTRAN by means of standard computational routines for modal analyses (SOL 103). With the "SOL 103" are identified in NASTRAN all those algebraic operations for the execution of a modal analysis of the model; instead, with the acronym "SOL 101" are identified all those algebraic operations for the executions of a static analysis.

3. Analytical procedure

The validation procedure (fig. 5) is based on the possibility to quantify the level of correlation between the reduced and the complete (starting) model in the frequency range of interest; the procedure utilizes the modal analysis of both the reduced and the complete models, in order to characterize the behaviour of the models in terms of mass matrix, stiffness matrix and dynamics of the component.

The analytical validation is carried out in three steps:

- 1 – assessment of shape correlation between the eigen-

lo ridotto, è effettuata sulla base di una verifica di ortogonalità rispetto alla matrice di massa. In letteratura esistono diversi criteri per stabilire la correlazione di forma tra due auto-vettori (rif. [7]), nel caso in analisi è stato utilizzato un indice denominato "NCO index" (Normalized Check Orthogonality index, indice di Verifica dell'Ortogonalità Normalizzata) il quale è definito come segue:

$$NCO = \frac{|\Phi_1^T \cdot M_m \cdot \Phi_2|^2}{(\Phi_1^T \cdot M_m \cdot \Phi_1)(\Phi_2^T \cdot M_m \cdot \Phi_2)}$$

dove con Φ_1 e Φ_2 sono indicati gli auto-vettori. Se l'indice assume un valore prossimo a 1 vuol dire che i due auto-vettori sono simili.

Sfruttando le matrici modali contenenti in colonna i primi i auto-modi del modello è possibile definire una matrice degli indici NCO la quale nel caso di totale correlazione di forma tra modello ridotto e completo è diagonale con valori prossimi all'unità. In fig. 6 è riportato un esempio relativo al modello trave precedentemente presentato; supponendo che nella banda di frequenza di interesse ci siano 3 auto-modi: dall'esempio riportato si evince che il primo ed il secondo modo del modello ridotto sono strettamente correlati con quelli del modello di partenza, invece il terzo modo del modello ridotto per quanto riguarda la forma non è una buona rappresentazione del corrispondente ottenuto dal modello di partenza.

Inoltre a garanzia della corretta applicazione della tecnica di riduzione è effettuata una valutazione della correlazione esistente degli auto-vettori espansi ottenuti dall'analisi modale del modello ridotto, in questo caso si parla di Cross-NCO.

Il comportamento dinamico dei vari auto-modi è verificato confrontando le auto-frequenze associate agli auto-vettori che hanno una sufficiente correlazione di forma; viene valutata la differenza percentuale rispetto alla frequenza del modo ottenuto dal modello FEM completo. Facendo riferimento all'esempio riportato si effettuerebbe questo tipo di controllo solo per il primo ed il secondo modo; gli unici che hanno garantito una sufficiente correlazione di forma.

I primi due punti della procedura (fig. 5) possono essere interpretati come una

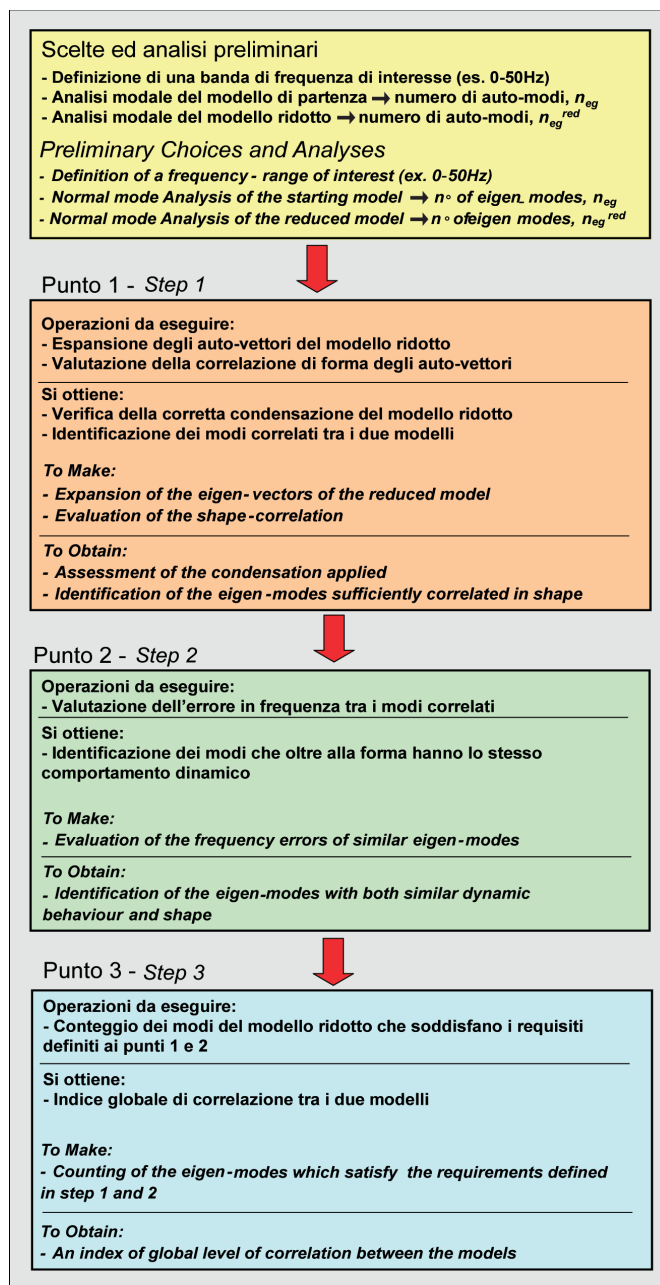


Fig. 5 - La procedura analitica di validazione del modello ridotto: per ciascun punto sono evidenziate le operazioni da effettuare ed i risultati ottenibili. The analytical procedure for the validation of the reduced model: inputs and outputs are highlighted for each step.

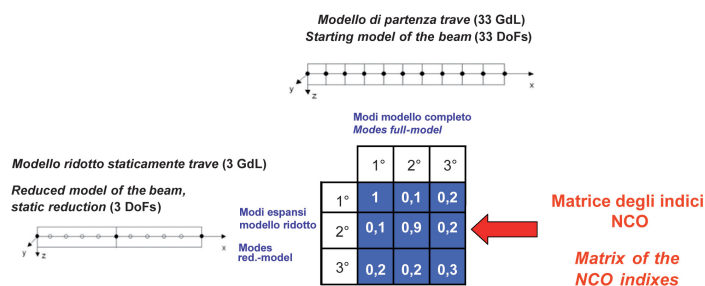


Fig. 6 - Esempio di matrice NCO relativa all'esempio del modello trave. I valori indicati in tabella non sono ottenuti per mezzo di un reale confronto tra i due modelli, ma sono semplicemente dei valori a puro carattere illustrativo. *NCO matrix applied to the example of a beam. The values in the entries are merely illustrative and don't refer to an actual comparison between the two model.*

sorta di validazione delle matrici di massa e di rigidità del modello ridotto, (rif. [2]-[3]).

La bontà della riduzione è quantificata per mezzo di un indice globale di correlazione. Questo indice è definito come il rapporto percentuale tra il numero di auto-modi del sistema ridotto che soddisfano entrambi i requisiti in termini di forma e frequenza, rispetto a quelli del modello completo nella banda di frequenza di interesse:

$$C = \frac{\bar{n}_{eg}^{RED}}{n_{eg}} \cdot 100$$

dove n_{eg} è il numero di auto-modi del modello completo nella banda di frequenze di interesse, \bar{n}_{eg}^{RED} è il numero di auto-modi del modello ridotto che soddisfano i requisiti.

Si è deciso di fissare come valori di soglia, in accordo a quanto riportato in precedenti lavori che hanno ottenuto buoni risultati (rif. [1]): 0,9 per la correlazione di forma, errore massimo pari al 10% sulla frequenza per il comportamento dinamico, C minimo pari al 90% per l'accettabilità del modello ridotto.

Uno dei punti di forza di questo processo di validazione è quello di poter disporre di un metodo che riesce a fornire allo stesso tempo informazioni globali e locali del modello ridotto rispetto a quello completo. Infatti oltre a definire un indice globale di correlazione è possibile analizzare in dettaglio quali modi sono ben approssimati in termini di forma e di frequenza al fine di ottimizzare la tecnica di riduzione.

4. Implementazione della procedura

A causa delle notevoli dimensioni delle matrici e degli auto-vettori dei modelli FEM, è stato impossibile caricare direttamente tutte queste strutture senza andare incontro a problemi computazionali relativi all'insufficiente memoria CACHE dei calcolatori. Sfruttando il linguaggio MATLAB per tutta la procedura di validazione, sarebbe stato necessario, per valutare gli indici di correlazione di

modes of the two models;

2 – assessment of dynamic behaviour of similar eigen-modes;

3 – synthesis of a global index which correlates the two models in the frequency range of interest.

The shape correlation between eigen-modes of the complete model and expanded eigen-modes of the reduced model is assessed on the basis of the orthogonality with respect to the mass matrix. Several criteria can be found in literature which determine the shape correlation between two eigen-vectors (ref. [7]); in our case the "NCO index" has been used, which

is defined as follows:

$$NCO = \frac{|\Phi_1^T \cdot M_{nn} \cdot \Phi_2|^2}{(\Phi_1^T \cdot M_{nn} \cdot \Phi_1)(\Phi_2^T \cdot M_{nn} \cdot \Phi_2)}$$

where the eigen-vectors are identified by Φ_1 e Φ_2 . The index reaches the value of 1 when the eigen-vectors are similar.

In the same way it is possible to define a matrix of NCO indexes, considering that the first i eigen-modes of the model are the columns of the modal matrix: in case of total shape correlation between reduced and complete model, the NCO matrix is diagonal, with all entries equal to 1. The example of a beam is proposed again in fig. 6, assuming that 3 eigen-modes are present in the frequency range of interest: it can be noticed that a good correlation exists in the first two modes between the reduced and the complete model, but that is not completely true for the third eigen-mode, which shows a worse correlation.

In order to guarantee the correct application of the reduction technique, it is necessary to assess the correlation among the expanded eigen-modes coming from the modal analysis of the reduced model, thus having a Cross-NCO.

The dynamic behaviour of the different eigen-modes is verified by comparison of the eigen-frequencies associated with the eigen-vectors showing a good shape correlation: the difference of frequency is calculated in percentage of the frequency associated with the complete FE-model. With reference to the example above, such verification should be done for the first and the second modes, the only that guarantee a good shape correlation.

The former two steps of the procedure (fig. 5) can be seen as a sort of validation of mass and stiffness matrices of the reduced model (ref. [2], [3]).

The quality of the reduction is quantified by means of a global correlation index. Such an index is the percentage ratio between the number of eigen-modes of the reduced model which fulfil both shape and frequency criteria and

forma, sviluppare algoritmi in grado di gestire scambi di dati con l'*hard disk* del calcolatore (matrici salvate in files in formato ASCII o binario, alternativamente aperti per la computazione degli indici NCO).

La scelta più logica si è rivelata quella di implementare la prima parte della procedura con il linguaggio di alto livello denominato DMAP direttamente eseguibile in NASTRAN. Le ragioni di questa scelta sono facilmente riassumibili nei seguenti motivi:

1. NASTRAN è utilizzato come solutore delle analisi modali dei modelli, ridotto e completo, quindi contiene all'interno del proprio database durante la routine standard di calcolo tutte le informazioni necessarie per la valutazione degli indici NCO (matrice di massa, auto-vettori, frequenze);
2. NASTRAN già sfrutta algoritmi che si interfacciano con l'*hard disk* i quali sono sicuramente più efficienti e robusti di quelli che saremmo stati in grado di sviluppare in ambiente MATLAB.

Per tali ragioni è stato sviluppato un alter, ovvero una lista eseguibile di comandi di NASTRAN che permette l'inserimento di particolari comandi definiti dall'utente all'interno del listato delle routine (che invece è standard). Tale alter scritto in linguaggio DMAP interagisce con la routine di calcolo di NASTRAN e permette la valutazione degli indici NCO in 2 o 3 lanci. Sono state sviluppate due procedure di valutazione.

Ciascun lancio fornisce come uscita intermedia un *file* in formato ASCII il quale deve essere utilizzato come ingresso per il lancio successivo. Nell'uscita conclusiva sono stampati in unico file in formato ASCII, gli indici NCO, gli indici Cross-NCO e le auto-frequenze ottenuti dalle analisi modali dei modelli ridotto e completo. In fig. 7 è illu-

the number of eigen-modes of the complete model in the frequency range of interest:

$$C = \frac{\bar{n}_{eg}^{RED}}{n_{eg}} \cdot 100$$

where n_{eg} is the number of eigen-modes of the complete model in the frequency range of interest and \bar{n}_{eg}^{RED} is the number of eigen-modes of the reduced model which fulfil the requirements.

According to the good results of previous works (ref. [1]), the following threshold values have been fixed: 0.9 for the shape correlation, a maximum frequency error of 10% for the dynamic behaviour and a minimum value of C equal to 90% for the acceptability of the reduced model.

One of the strongest points of this validation process is to have in the same breath local and global information on the reduced model with respect to the complete one. In fact, apart from the definition of a global correlation index, it is possible to analyze in detail which modes are well approximated in terms of shape and frequency, in order to optimize the reduction technique.

4. Implementation of the procedure

Due to matrix and vector sizes, software as MATLAB cannot allow to manage directly all the matrices for the NCO evaluation due to CPU performance in terms of CACHE memory. Utilizing that kind of software, the only practicable solution would be to develop algorithms dedicated to hard disk memory interfacing (Matrices written in text file and algebraic calculations performed utilizing sub-matrices with acceptable dimensions).

It has been decided that the best way to solve this problem was to develop an algorithm utilizing the high level language of the DMAP (*Direct Matrix Abstraction Program*) which is directly executable in NASTRAN, because:

1. NASTRAN may be used as solver for the normal mode analysis then it contains already in his Database all the information for NCO evaluation as mass matrix and eigen-vectors;
2. NASTRAN uses, already, algorithm interfacing the hard disk memory that are more efficient and robust than those might be developed using MATLAB.

Therefore, it has been developed an alter which is a function that allows the insertion of particular statements in the standard solution routines of NASTRAN; such alter acts with the

PROCEDURA 2 - PROCEDURE 2

• 2 Lanci • 2 runs

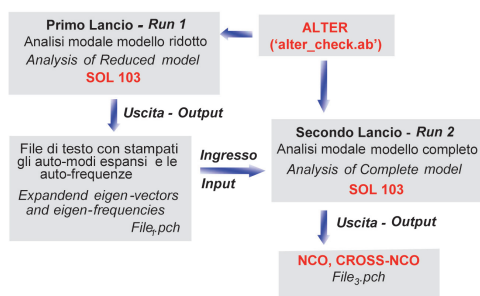


Fig. 7 - Procedura 2. Vengono effettuate in sequenza due analisi modali, prima il modello ridotto e poi quello di partenza, facendo agire l'alter sviluppato. Alla fine di tale procedura si ottengono in un file in formato ASCII le matrici NCO e Cross-NCO. Procedure 2. Two normal modes analyses are sequentially done: the first one is the analysis of the reduced model, the second one concerns the starting model. The alter acts in both the analyses. At the end of the procedure an ASCII file is obtained (file3.pch), where the NCO, the Cross-NCO and eigen-frequencies are printed.

strato brevemente come si articola una delle due procedure sviluppate.

L'implementazione della procedura analitica (punto 2 e punto 3) è stata completata con lo sviluppo di una routine in ambiente MATLAB la quale utilizza come ingresso il file in formato ASCII uscito dalla procedura in ambiente NASTRAN.

Tale procedura è stata anche configurata per la valutazione della correlazione di differenti modelli FEM derivanti da un modello di partenza al quale sono state apportate modifiche locali in termini di rigidità e massa. Questo tipo di analisi è molto efficiente per quantificare in termini di dinamica strutturale gli effetti di differenti strategie di modellazione o in alcuni casi di differenti strategie di progettazione.

5. Esempio di applicazione della procedura

Si riportano come esempio i risultati ottenuti dalla validazione dei modelli ridotti di un modello agli elementi finiti di una cassa; si è voluto quantificare la bontà dei modelli ridotti in una banda di interesse fino a 30 Hz.

Il modello completo della cassa è principalmente composto da elementi *shell* (guscio) per un totale di $5 \cdot 10^5$ elementi e $3 \cdot 10^6$ gradi di libertà. Da un'analisi modale priva di vincoli applicata al modello sono stati ottenuti 29 autovalori nella banda di frequenza di interesse.

Su questo modello sono state applicate sia la tecnica di riduzione dinamica che quella statica (fig. 8). Dai risulta-

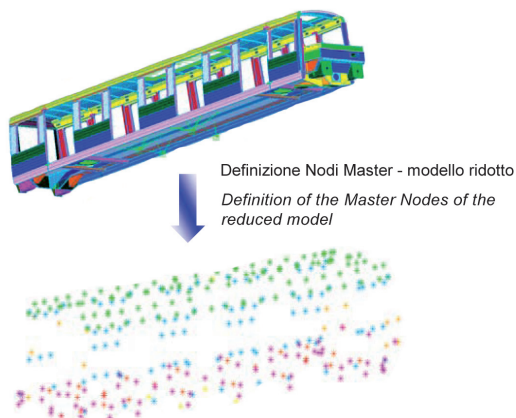


Fig. 8 - Modello FEM completo ed esempio di scelta dei nodi Master per effettuare la riduzione statica. *Fe-model of the starting model and definition of the Master nodes of the reduced model.*

ti ottenuti dall'esempio in analisi si ottiene che la riduzione dinamica è estremamente più efficiente di quella statica, anche in caso di un minor numero di dimensioni del modello ridotto. Entrambi i modelli ridotti presentano

standard routines of NASTRAN and allows the evaluation of the NCO indexes in 2 (Procedure n. 1) or 3 runs (Procedure n. 2). It must be noticed the alter must be used during a normal mode analysis solution and aids to carry out automatically the step 1 (only) of the validation procedure.

From each starting or intermediate run, an ASCII file ("*file.pch*") is obtained as output, which has to be utilized as input for the subsequently run. The last output is also an ASCII file, where all the NCO indexes and the eigenfrequencies of the both models are printed. Fig. 7 shows the procedure with 2 runs.

The whole validation procedure has been completely implemented (Step 2 and Step 3) by means of a routine developed in MATLAB environment, which uses as input the ASCII file previously described.

Such validation procedure has been also implemented to evaluate the level of correlation of FE-models with small/local differences in terms of mass and/or stiffness, all ones obtained from a main starting model; such analyses are useful in order to quantify the effect in the dynamics behaviour of the structures due to different modelling or design approaches.

5. Practical example

We show as example the results obtained from the validation procedure applied for two reduced FE-models of a carbody, "head-coach"; it has been evaluated the level of correlation in a frequency range from 0 up to 30 Hz.

The starting FE-model of the head-coach is mainly realized with shell elements for a total of $5 \cdot 10^5$ elements and $3 \cdot 10^6$ degrees of freedom. From a normal mode analysis without any boundary conditions, 29 resonant modes have been obtained.

After the choice of the master nodes, both the static (fig. 8) and the dynamic reductions have been applied to reduce the starting model.

The results show how the dynamic reduction is more efficient than the static one, even if the size of the reduced FE-model is smaller for the first one. Both the reduced FE-models show a perfect matrix of the Cross-NCO indexes (diagonal matrix) in order to attest the right application of the condensation techniques (figg. 9 and 10), instead the matrices of the NCO indexes highlight differences in shape correlation (Figg. 11 and 12). Table 1 summarizes the main information about the two reduced FE-models.

The FE-model reduced with dynamic condensation results a better representation of the starting model, with respect to that obtained with the static technique. This fact is highlighted by a direct analysis of the matrices of the NCO indexes; The matrix of the NCO indexes of the model reduced with the dynamic condensation

una matrice di Cross-NCO perfetta, ovvero perfettamente diagonale, a conferma della corretta applicazione della trasformazione (figg. 9 e 10), ma per quanto riguarda le

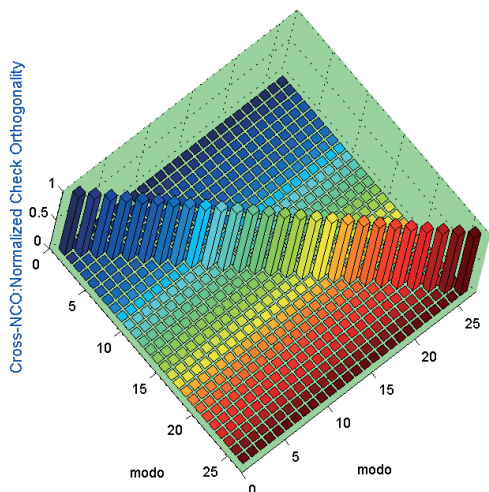


Fig. 9 - Matrice 3-D degli indici Cross-NCO del modello ridotto con condensazione statica. Sull'ascissa verticale è riportato il valore assunto dall'indice, sugli altri assi si indicano in sequenza i modi. Per esempio se si vuole leggere la correlazione esistente tra il modo n. 4 con il modo n. 3, basta andare alla casella della matrice individuata dagli indici 3 e 4. 3-D Matrix of the Cross-NCO indexes of the FE-model reduced with static condensation. The vertical axis shows the magnitude of the Cross-NCO index, the other axes indicate sequentially the eigen-modes. As example to know the level of correlation between the eigen-mode n°3 and n°4, it has to read the magnitude of the NCO index of the cell individuated by the third row and the fourth column (and vice-versa) of the matrix.

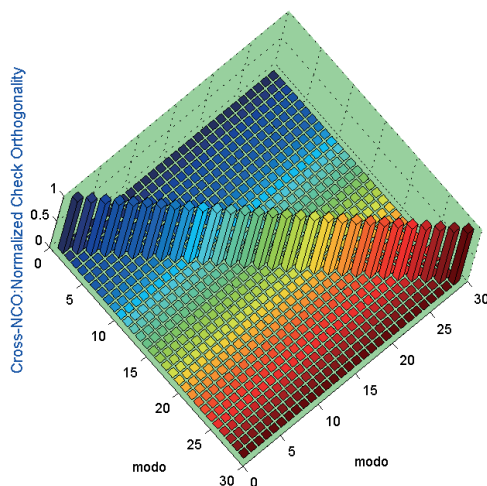


Fig. 10 - Matrice 3-D degli indici Cross-NCO del modello ridotto con condensazione dinamica. Matrix of the Cross-NCO indexes of the FE-model reduced with dynamic condensation.

(fig. 12) is nearer to a diagonal matrix than the other one (fig. 11). This advantage depends on the transformation matrix, G_{nm} , which in dynamic reduction takes also the mass matrix of the starting model into account and capture more information with the same master nodes (than the static one).

The FE-model reduced with dynamic condensation obtains a global index of correlation of 83% with respect

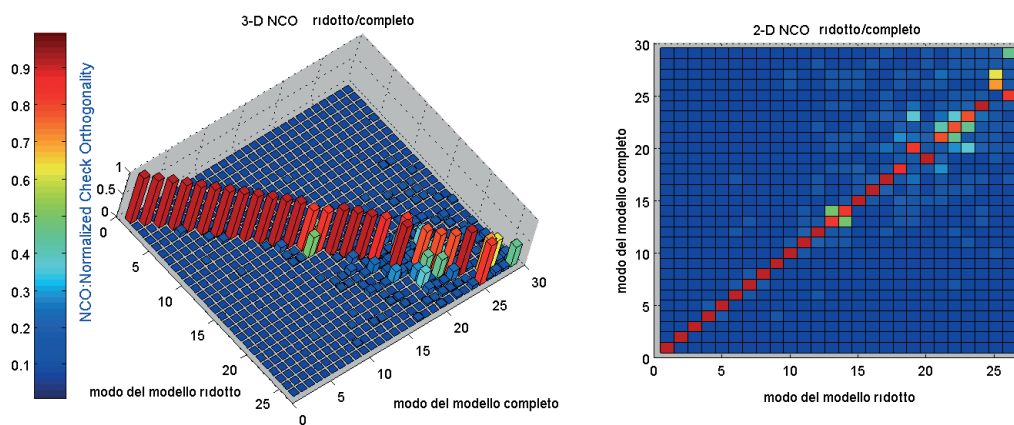


Fig. 11 - Matrice 3-D degli indici Cross-NCO del modello ridotto con condensazione dinamica. Matrix of the Cross-NCO indexes of the FE-model reduced with dynamic condensation.

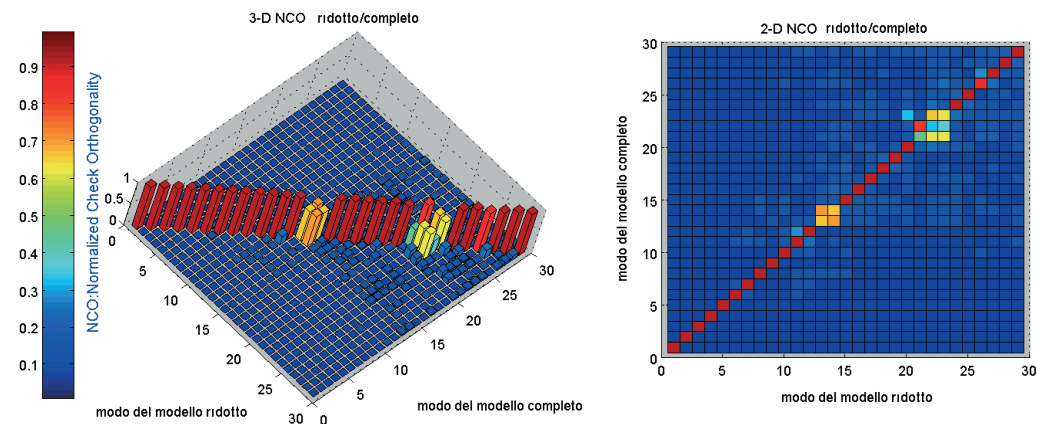


Fig. 12 - Matrici 3-D degli indici NCO del modello ridotto con condensazione dinamica. Matrix of the NCO indexes of the FE-model reduced with dynamic condensation.

matrici NCO presentano una differente correlazione di forma (figg. 11 e 12). In tabella 1 sono riassunte le informazioni principali relativi ai due modelli ridotti.

Il modello ridotto con la condensazione dinamica risulta una migliore rappresentazione del modello completo rispetto a quello ottenuto con la condensazione statica. Ciò è visibile analizzando la matrice degli indici di correlazione che, in questo caso (fig. 12), si avvicina molto di più ad una matrice perfettamente diagonale. Questo vantaggio è ascrivibile al fatto che la matrice di trasformazione tiene conto anche della matrice di massa del modello completo e quindi riesce a “catturare” correttamente un maggior numero di informazioni da quest’ultimo.

Il modello ridotto con la condensazione dinamica ottiene un indice di correlazione rispetto al modello completo pari al 83%, mentre quello ridotto con la condensazione statica ottiene un indice del 62%.

L’esempio mostrato evidenzia le potenzialità della procedura, prima pensata e poi implementata. Questa permette di quantificare in maniera globale, ma anche locale, il grado di correlazione esistente tra il modello ridotto e quello completo, in modo da avere un completo controllo da parte dell’utente dell’intero processo di integrazione di un corpo flessibile all’interno di un sistema multi-corpo.

6. Futuri sviluppi

Ulteriori sviluppi riguardanti la procedura di validazione possono riguardare l’implementazione di ulteriori indici di correlazione per la forma degli auto-modi, per esempio il MAC index (Modal Assurance Criterion index,

to the starting model, on contrary the other one (reduced with static technique) obtains an index of 62%.

TABELLA 1 – TABLE 1

RIDUZIONE STATICA VS RIDUZIONE DINAMICA – STATIC REDUCTION VS DYNAMIC REDUCTION

Tecnica di Riduzione <i>Reduction Technique</i>	Statica <i>Static</i>	Dinamica <i>Dynamic</i>
Nodi Master <i>Master Nodes</i>	322	8
Gradi di Libertà dinamici <i>Dynamic Master Nodes</i>	-	35
G.d.L modello ridotto <i>DoF red. FE-model</i>	990	83
Auto-modi sotto 30 Hz <i>Eigen-modes under 30 Hz</i>	26	29
Cross- NCO <i>Cross- NCO</i>	Perfetto <i>Perfect</i>	Perfetto <i>Perfect</i>
C indice, [%] <i>C index, [%]</i>	62	83

This practical example highlights the potentiality of the validation procedure, firstly thought and then implemented. Such procedure aids to quantify both globally and locally the level of correlation between the reduced and starting model, in order to control and attest the whole process for the integration of a flexible body into a multi-body system.

6. Future developments

Another development of the validation procedure could concern the implementation of other shape-correla-

Criterio di Assicurazione Modale, rif [7]). Inoltre una maggiore efficienza in termini di tempo, della procedura di valutazione degli indici di forma può essere ottenuta generando come files di uscita, soprattutto quelli intermedi, files in formato binario invece che in formato ASCII; la scrittura di files binari è estremamente più veloce e compatta rispetto a quelli di partenza.

tion indexes as the MAC index (Modal Assurance Criterion Index, ref. [7]). Furthermore, an improved efficiency of the evaluation of the NCO and Cross-NCO indexes could be reached utilizing binary files, instead of ASCII files, as starting/intermediate output for step 1; the writing of binary files is more quick and compact than the writing of the other ones.

BIBLIOGRAFIA – REFERENCES

- [1] I. ZAMAN, R. RAHMAN, “Application of dynamic correlation technique and model updating on truck chassis”, University Technology of Malaysia.
- [2] H.G. SCHAEFFER, “MSC/NASTRAN PRIMER: Static and Normal Analysis”, PDA Engineering, 1979.
- [3] J.T. YOUNG, “Primer on the Craig-Bampton method”, New Jersey 1981.
- [4] J. PEETERS, D. VANDEPITTE, P. SAS, S. LAMMERS, “Comparison of analyses techniques for the dynamic behaviour of an integrated drivetrain in a wind turbine”, Heverlee, Belgium.
- [5] Y.T. YOUNG, “Model Reduction and Model Correlation Using MSC/NASTRAN”, Huntining Beach(CA), USA.
- [6] A. BARONI, “Multi-Purpose Flexible Bodies Integration into a Metro-Vehicle Multi-Body System”, Università degli Studi di Pisa, 2009.
- [7] R.J. ALLEMANG, “The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse”, University of Cincinnati, Ohio.

Sommaire	Zusammenfassung
<p>DÉVELOPPENT D'UNE PROCÉDURE DE VALIDATION DE MODÈLES AUX ÉLÉMENTS FINIS RÉDUITS</p> <p>Dans le processus d'intégration d'un corps flexible, à l'intérieure d'un système à corps multiples, un pas très critique est représenté par la réduction du modèle aux éléments finis du composant utilisé en phase de projet pour les analyses de tension détaillées. Pour une telle raison un processus de validation du modèle réduit a été conçu, développé et implémenté sur la base d'une procédure analytique. Cette procédure garantit un contrôle complet de la réduction du modèle aux éléments finis, permet d'optimiser la technique de réduction utilisée et en même temps de quantifier le niveau existant de corrélation entre le modèle réduit et le modèle de départ.</p> <p>Cette procédure de validation a été développée en utilisant le DMAP (Direct Matrix Abstraction Program) de MSC NASTRAN, en combinaison avec le plus commun langage de haut niveau du logiciel "user-friendly" MATLAB (réf. [6]).</p>	<p>ENTWICKLUNG EINES VALIDIERUNGSVERFAHRENS VON EINGESCHRÄNKTEN FEM MODELLEN</p> <p>Die Ersetzung eines biegsamen Körpers in ein Multibody Modell ist ein kritischer Schritt eines Verfahrens: in diesem Verfahren wird ein schon FEM analysierte Glieder umgestaltet um eine Modellseinschränkung zu erreichen. Die Validierung des umgestaltenden Modells benötigt eine besondere Prozedur, die dazu gedacht und entwickelt wurde.</p> <p>Diese Prozedur versichert eine gesamte Modellkontrolle und erlaubt die Bestimmung des Korrelationsniveau zwischen kompletten und eingeschränkten Modell. Benutzte Tools sind DMAP (Direct Matrix Abstraction Program), MSC NASTRAN und MATLAB.</p>