



## Annotazioni sulla dinamica dei ponti ferroviari

Applicazione nel caso del Ponte “Essen Gemellato”

Dott. Ingg. Maurizio LENZI<sup>(\*)</sup>, Paola CAMPANA<sup>(\*)</sup>, Marco TISALVI<sup>(\*\*)</sup>,  
Leopoldo IMPELLIZZIERI<sup>(\*\*\*)</sup>, Marco FALZACAPPA<sup>(\*\*\*)</sup>

**SOMMARIO** – Nella nota viene preso in esame il comportamento dinamico dei ponti ferroviari focalizzando l’attenzione sulle condizioni che determinano l’amplificazione dinamica della risposta strutturale. Vengono illustrati esempi numerici e confronti con dati sperimentali relativi all’impiego del sistema per il sostegno provvisorio dei binari denominato Ponte “Essen Gemellato”.

### 1. Premessa

Lo studio del comportamento dinamico dei ponti costituisce uno dei temi di maggiore interesse nelle infrastrutture ferroviarie ed in tale ambito un ruolo cruciale spetta allo studio dell’interazione dinamica tra treno e struttura e della amplificazione indotta dal transito dei convogli. Riguardo questo argomento la nota richiama dapprima alcune nozioni fondamentali di dinamica dei sistemi continui deformabili che consentono di trattare il tema in oggetto in forma unitaria e, si ritiene, originale e di porre l’accento sui vantaggi interpretativi connessi all’impiego del modello analitico basato sulla sovrapposizione degli effetti indotti dai singoli carichi viaggianti. Tale aspetto si rileva poi utile per definire le condizioni che determinano risonanza o cancellazione delle vibrazioni nel caso di transito di carichi periodici. Segue inoltre un cenno sull’impiego dei modelli di massa mobile e di oscillatore mobile. Infine si illustra l’applicazione dei modelli teorici ed il confronto con i risultati relativi ad una campagna sperimentale volta a caratterizzare il comportamento dinamico del sistema per il sostegno provvisorio dei binari denominato Ponte “Essen Gemellato”, le cui caratteristiche tecniche salienti verranno illustrate nel seguito del testo.

### 2. Modello a forza viaggiante

a) L’equazione del moto di una trave in semplice appoggio percorsa da una forza mobile di intensità costante si esprime, come noto, nella forma differenziale seguente (FRYBA [2]):

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + EJw'' = P\delta(x - Vt)$$

relazione nella quale  $m$  è la massa specifica per unità di lunghezza della trave,  $c$  è la costante di smorzamento,  $EJ$  è la rigidezza flessionale della sezione trasversale,  $P$  è la forza mobile (fig.1). A sua volta il punto indica la derivata rispetto alla variabile temporale, l’apice la derivata rispetto alla coordinata spaziale mentre il simbolo  $\delta(x-vt)$  indica la funzione delta di Dirac valutata nel punto di ascissa  $x = Vt$ .

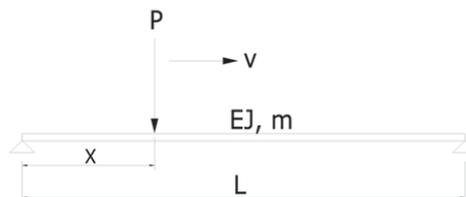


Fig. 1 – Modello per lo studio della interazione dinamica con carico mobile.

<sup>(\*)</sup> ACMAR, Ravenna.

<sup>(\*\*)</sup> RFI Spa, Roma.

<sup>(\*\*\*)</sup> ESSEN Italia, Roma.

Per la ricerca della funzione che descrive lo spostamento verticale,  $w(x)$ , di una generica sezione si adotta una soluzione a variabili separate utilizzando la tecnica della sovrapposizione modale. Considerando che ai fini della ricerca del fattore di amplificazione è sufficiente considerare la prima forma modale (si veda in proposito l'Istruzione FF.SS. I/SC/PS-OM/2298) si adotta come soluzione il prodotto di funzioni:

$$w(x,t) = q(t) \phi(x) = q(t) \sin(\pi x/L)$$

Sostituendo l'espressione precedente nell'equazione del moto, moltiplicando per la forma modale  $\phi(x)$ , integrando sulla lunghezza della trave e tenendo conto delle proprietà delle funzioni trigonometriche si ricava per la coordinata generalizzata  $q(t)$ , ossia per la storia temporale della freccia in mezzeria, l'equazione differenziale seguente [3]:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega\dot{q} + \omega^2q = \frac{P}{M} \sin\left(\frac{\pi Vt}{L}\right)$$

che rappresenta il moto di un oscillatore semplice smorzato soggetto ad una forzante armonica di frequenza:

$$\Omega = \frac{\pi V}{L}$$

Al solito  $\omega = 2\pi n_0$  è la pulsazione,  $\xi = c/2m\omega$  rappresenta il coefficiente di smorzamento mentre  $M$  è la massa modale, pari ad  $mL/2$  nel caso di caratteristiche inerziali costanti. Per esplicitare la funzione spostamento ricercata conviene poi introdurre il rapporto:

$$K = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{V}{2n_0L}$$

tra la frequenza di transito,  $\Omega$ , e quella di oscillazione naturale,  $\omega$ , ossia tra la velocità di transito,  $V$ , e la velocità critica  $V_{cr} = 2n_0L$ . Indicata poi con:

$$\delta_{st}^1 = \frac{L^3}{48EJ}$$

la freccia statica in mezzeria indotta da un carico unitario ivi concentrato, per bassi smorzamenti strutturali, come nel caso dei ponti metallici, misti ed in c.a.p., si ricava per

Time History della freccia in mezzeria - Singolo Carico Mobile

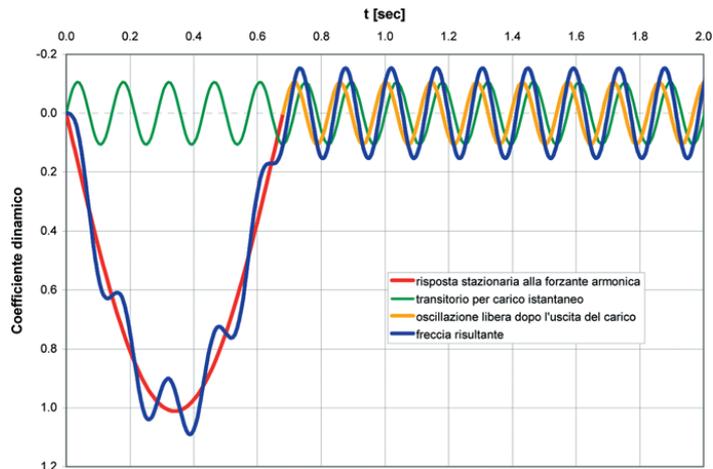


Fig. 2 - Transito singolo carico mobile – Componenti delle oscillazioni.

Time History - Transito Singolo Carico Mobile

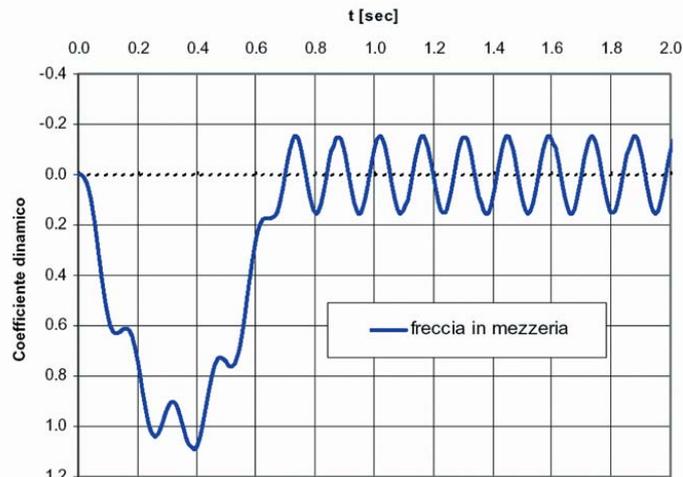


Fig. 3 - Time History transito singolo carico mobile – freccia in mezzeria.

la time history della freccia in mezzeria le espressioni qui di seguito riportate:

$$q_1(t) = P \frac{\delta_{st}^1}{(1-K^2)} \cdot [\sin(\Omega t) - K e^{-\xi\omega(t-t_0)} \sin(\omega t)] \quad 0 < t < L/V$$

$$q_2(t) = P \frac{\delta_{st}^1}{(1-K^2)} \cdot \{-K e^{-\xi\omega t} \sin(\omega t) - K e^{-\xi\omega(t-L/V)} \sin[\omega(t-\frac{L}{V})]\} \quad t > L/V$$

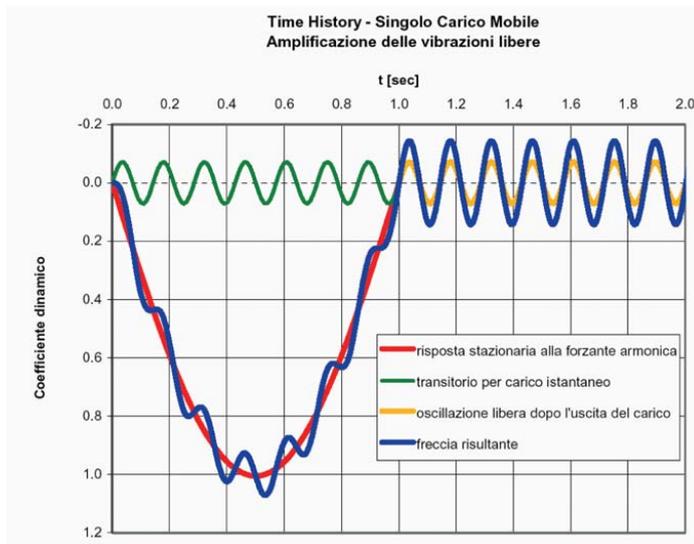


Fig. 4a – Condizione di amplificazione delle vibrazioni residue.

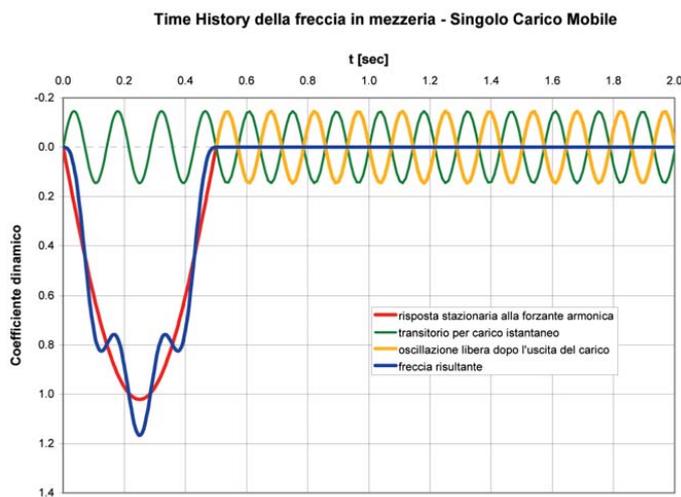


Fig. 4b. Condizione di cancellazione delle vibrazioni residue.

La soluzione dell'equazione del moto si compone quindi di due funzioni temporali di cui la prima  $[q_1(t)]$  descrive l'oscillazione indotta dal passaggio sul ponte del carico viaggiante (oscillazione forzata) e dall'applicazione istantanea della forza (termine esponenziale decrescente) mentre la seconda  $[q_2(t)]$  descrive l'oscillazione libera che si instaura dopo l'uscita del carico. Nella risposta dinamica si

$$q_2(t) = P \delta' \frac{-K}{1-K} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2K}\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{L}{2V}\right)\right]$$

oscillazione libera risultante      amplific. dinam. comune delle 2 vibrazioni libere      oscillazione periodica  
 freccia statica      amplif. dinamica      somma delle ampiezze delle 2 oscillaz. Libere

possono quindi identificare tre termini (fig. 2) di cui il primo agisce nell'intervallo di tempo  $0 < t < L/V$ , il secondo agisce per tutta la durata del moto di oscillazione mentre il terzo termine produce i suoi effetti per  $t > L/V$ . La risposta dinamica di una trave sollecitata da un carico mobile (fig. 3) consta quindi dei seguenti tre contributi:

- la risposta stazionaria alla forzante armonica che agisce per la durata di un semiperiodo corrispondente al transito del carico;
- l'oscillazione libera che nasce all'ingresso del carico sul ponte a seguito dell'applicazione istantanea della forza e che si genera per imporre il rispetto della condizione iniziale di velocità di vibrazione nulla, condizione violata invece dalla risposta stazionaria che nell'oscillazione a regime, nell'istante in cui la trave transita per la configurazione indeformata, possiede invece la massima velocità di oscillazione;
- l'oscillazione libera che nasce dopo l'uscita del carico dal ponte a seguito dell'istantanea soppressione della forza mobile, ossia della scomparsa della risposta a regime, e che si genera anche in questo caso per imporre il rispetto di una analoga ma opposta condizione di continuità sulla velocità di vibrazione. Per tale ragione l'oscillazione libera generata dall'uscita del carico dal ponte ha la stessa ampiezza iniziale di quella generata dal suo ingresso, anch'essa crescente al crescere della velocità di transito.

La comparsa dei due regimi di vibrazione libera è alla base degli effetti di amplificazione e di cancellazione delle vibrazioni successive all'uscita del carico dal ponte ed è correlata agli effetti di risonanza e cancellazione descritti nel seguito. Considerando per semplicità il caso di una struttura non smorzata ( $\xi=0$ ), l'oscillazione residua risultante dopo l'uscita del carico assume la forma:

dalla quale è possibile ricavare le condizioni di amplificazione o di cancellazione. S'intuisce infatti che qualora il tempo di percorrenza del ponte, pari ad  $L/V$ , sia multiplo di  $2\pi/\omega = 1/n_0$ , le vibrazioni libere risultano in fase [ $\cos(\pi/2K)=1$ ] e le loro ampiezze si sommano direttamente in ogni istante, raddoppiandosi in tal modo l'intensità della vibrazione libera. Tale fenomeno corrisponde ad un effetto di amplificazione del moto e si verifica per velocità di transito:

$$V_r = \frac{2n_0 L}{2i} \quad (i=1,2,3\dots)$$

Qualora invece il tempo di percorrenza  $L/V$  sia pari ad un multiplo dispari di  $\pi/\omega=1/2n_0$ , le due oscillazioni naturali risultano in controfase [ $\cos(\pi/2K)=0$ ] e si annullano l'un l'altra, senza pertanto che si generi alcuna oscillazione residua dopo il transito del carico. Tale fenomeno corrisponde ad un effetto di cancellazione delle vibrazioni libere e si verifica per velocità di transito pari a:

$$V_c = \frac{2n_0 L}{2i-1} \quad (i=1,2,3\dots)$$

La simulazione numerica dei fenomeni indicati è riportata in fig. 4a e 4b per una struttura non smorzata. Si intuisce peraltro che se la velocità di cancellazione e quella per cui si produce risonanza coincidono, è il primo fenomeno a prevalere essendo la risonanza generata, come si vedrà, dalla somma delle oscillazioni libere successive al transito dei singoli carichi e se queste sono inizialmente nulle, tale permane anche la loro somma a sovrapposizione avvenuta.

**3. Risposta ad una sequenza di carichi**

Nel caso reale in cui sul ponte transitino più carichi in successione la risposta strutturale può essere determinata avvalendosi della soluzione vista in precedenza per il carico isolato. Data infatti la linearità delle equazioni del moto risulta lecito applicare la sovrapposizione degli effetti in virtù del quale la risposta dinamica della struttura soggetta al transito di convogli comprendente più assi di carico può essere valutata come somma dei contributi dovuti ai singoli carichi mobili. In tale procedura occorre avere solo l'avvertenza di assegnare alla variabile temporale  $t$  una origine comune per tutti i ca-

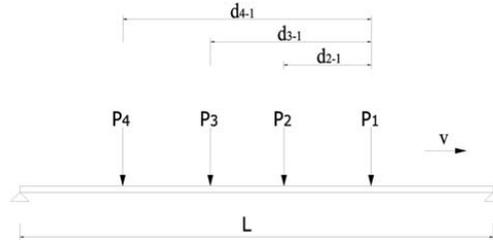


Fig. 5 - Schema di carichi mobili in transito in sequenza.

richi e di iniziare a computare la time history associata all'i-esimo carico a partire dall'istante del suo ingresso sul ponte, che risulta definito dalla relazione seguente:

$$t_i = \frac{d_{i-1}}{V}$$

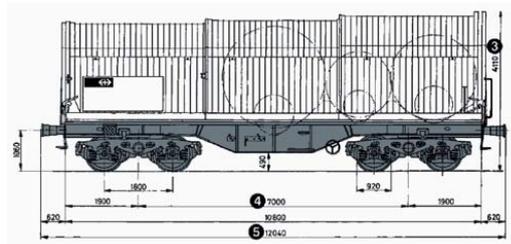


Fig. 6 - Schema di Carro tipo D4.

**Ponte Essen Gemellato - L=15.12 m**  
**Time History Transito Carro D4 - V= 80 km/h**

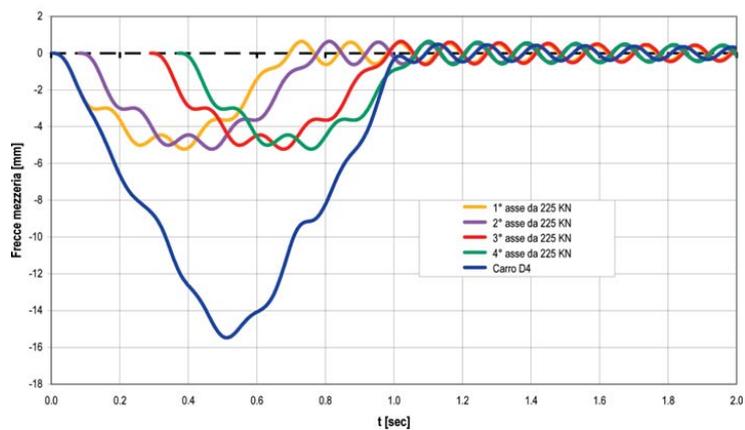


Fig. 7 - Time history transito Carro D4 a 4 assi da 22.5 t (V=80 km/h).

nella quale  $d_{i,1}$  rappresenta la distanza del carico mobile dal primo asse che entra sul ponte (fig. 5).

A titolo esemplificativo viene illustrata la risposta dinamica del Ponte "Essen Gemellato" soggetto al transito di un Carro D4 a 4 assi da 22.5 t (fig. 6) alla velocità di 80 km/h. Il risultato delle elaborazioni numeriche così ottenute è illustrato in fig. 7 in cui sono riportati i diagrammi delle frecce teoriche indotte dal transito dei singoli assi da 22.5 t del Carro D4, sfasate ciascuna del tempo proprio di arrivo sul ponte e la sovrapposizione degli effetti dei singoli carichi mobili con l'individuazione della freccia dinamica risultante.

In termini analoghi, utilizzando sempre la sovrapposizione degli effetti, è possibile valutare la risposta ad un convoglio di carichi sovrapponendo le time history relative ai vari carri ferroviari sfasate dei relativi tempi di ingresso dei carri sul ponte. Sempre a titolo esemplificativo viene riportata in fig. 8 la time history relativa al transito di una colonna di 20 Carri D4 utilizzata in sede di verifica della struttura. Tali diagrammi mostrano compiutamente la genesi della risposta dinamica dell'impalcato al transito di un treno reale. Come si può notare, nel caso esaminato, prevale l'effetto della oscillazione forzata essendo modesti e sfasati gli effetti delle vibrazioni libere cosicché ogni carro induce la medesima risposta, che si mantiene sostanzialmente costante nel tempo.

4. Effetti delle vibrazioni libere residue

L'aspetto peculiare della dinamica dei ponti ferroviari risiede nel fatto che la forzante agisce per un solo semiciclo, sino all'uscita del carico dal ponte, circostanza in virtù della quale la amplificazione dinamica per effetto diretto non può divenire rilevante anche in condizione di coincidenze delle frequenze di transito e di oscillazione. In questo caso infatti l'amplificazione massima (impact factor) risulta comunque limitata al valore  $\pi/2$ . Viceversa ogni carico produce una vibrazione libera che permane nel tempo anche dopo che il carico che l'ha prodotta ha cessato di agire, e cumulandosi con quella prodotta dai carichi precedenti e successivi può portare ad amplificazioni rilevanti. L'ampiezza della vibrazione residua accumulata ad un certo istante si ricava sommando i contributi dei singoli carichi e per un sistema non smorzato risulta valere ( $\omega L/V = \pi/K$ )

$$q_2(t) = -\delta_{st}^1 \frac{K}{1-K^2} 2 \cos\left(\frac{\pi}{2K}\right) \sum_{i=1}^j P_i \sin\left[\omega\left(t - t_i - \frac{L}{2V}\right)\right]$$

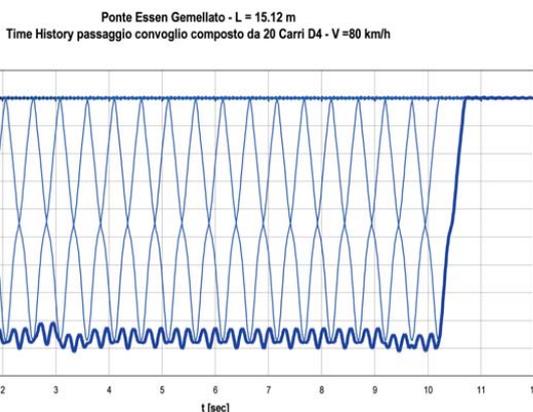


Fig. 8 - Time history del passaggio di una colonna di 20 Carri D4. Sovrapposizione delle singole storie di carico (V=80 km/h).

essendo  $t_i = d_{i,1}/V$  l'istante di ingresso del i-esimo carico e la somma estesa ai j carichi già transitati ed usciti (Li, Fan [5]). Rappresentando la sommatoria in forma vettoriale nel piano complesso (fig. 9) è possibile ricavare l'ampiez-

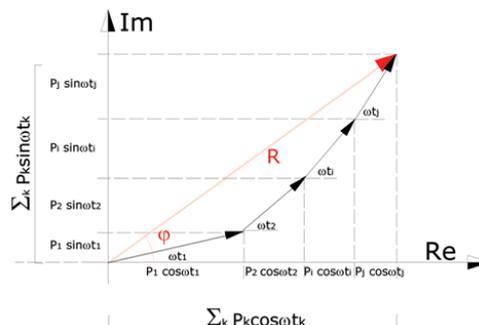


Fig. 9 - Composizione vettoriale dei moduli e delle fasi delle oscillazioni libere.

za, R, e la fase,  $\phi$ , della risultante delle vibrazioni libere residue, ottenendo per un sistema non smorzato:

$$R = \left\{ \left[ \sum_{i=1}^j P_i \cos\left(\omega \frac{d_{i-1}}{V}\right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^j P_i \sin\left(\omega \frac{d_{i-1}}{V}\right) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sum_i P_i \sin(\omega d_{i-1} / V)}{\sum_i P_i \cos(\omega d_{i-1} / V)}$$

Ne consegue un valore della freccia residua:

$$q_2(t) = -R \delta_{st}^1 \frac{K}{1-K^2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2K}\right) \cdot \sin\left[\omega\left(t - \frac{L}{2V}\right) - \phi\right]$$

che presenta un valor massimo:

$$\delta_{\max} = \delta_n^i \cdot \frac{K}{1-K^2} \cdot \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{2K}\right) \right| \cdot \max_{i=1,n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^i P_j \cos\left(\omega \frac{d_{j-1}}{V}\right) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^i P_j \sin\left(\omega \frac{d_{j-1}}{V}\right) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$S(V) = \max_{i=1,n} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^i P_j \cos\left(\omega \frac{d_{j-1}}{V}\right) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^i P_j \sin\left(\omega \frac{d_{j-1}}{V}\right) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

dipende invece solo dalla conformazione del convoglio (distribuzione dei carichi per asse e distanza tra gli assi) e rappresenta il carico equivalente che produce i medesimi effetti in termini di vibrazioni libere prodotti dal transito e dall'uscita di j degli n carichi della colonna. L'effetto massimo va perciò ricercato ogni volta che un nuovo carico aggiunge il proprio contributo di vibrazioni libere (max j=1,n) permanendo nel tempo quelle dei carichi già transitati. A titolo esemplificativo in fig. 10 è riportata l'impronta dinamica della colonna di 20 Carri D4 i cui picchi individuano le velocità per le quali le vibrazioni libere si rinforzano maggiormente (n<sub>0</sub>=6.99 Hz).

In termini duali, sempre tramite i concetti di linea di influenza e di impronta dinamica del treno, si possono ricavare anche le accelerazioni massime in condizioni di risonanza, come ad esempio nei metodi denominati LIR (residual influence line) e DER

(decomposition of the excitation at resonance) utilizzati, come ricordato, dall'Eurocodice 1-Parte 2 per definire la severità (aggressiveness) di un treno di carico per un ponte di assegnate caratteristiche.

A titolo esemplificativo in fig. 11 è riportato il grafico delle accelerazioni massime (a<sub>max</sub> = ω<sup>2</sup>δ<sub>max</sub>) indotte dal transito di una colonna di 20 Carri D4 sul Ponte "Essen

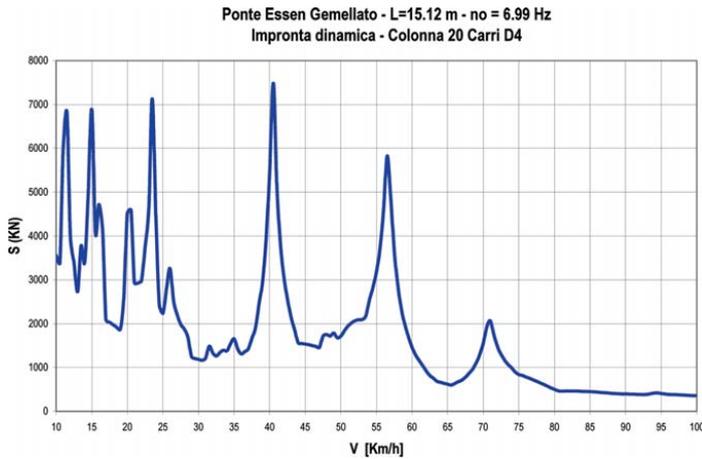


Fig. 10 - Impronta dinamica della colonna di 20 Carri D4.

espressione che evidenzia la complessità dell'interazione tra le varie componenti del moto libero da cui dipende il manifestarsi o meno delle condizioni di risonanza e che rende conto in modo esplicito dell'approccio utilizzato dall'Eurocodice di settore [UNI EN 1991-2].

Il primo termine dell'espressione, denominato linea di influenza dinamica (influence line) del ponte:

$$\Gamma(K) = \frac{K}{1-K^2} \cdot \left| 2 \cos\left(\frac{\pi}{2K}\right) \right|$$

è funzione delle caratteristiche del solo impalcato dipendendo il parametro  $K = V/2n_0L$  dalla luce e della frequenza di oscillazione del ponte. In tale termine il rapporto  $K/(1-K^2)$  rappresenta, a meno di  $\delta_{st}^i$ , l'ampiezza comune delle due oscillazioni libere che si generano rispettivamente all'ingresso e all'uscita dal ponte di un carico di intensità unitaria. Il fattore  $|2 \cos(\pi/2K)|$  rappresenta invece per ogni singolo carico l'effetto di interferenza delle due vibrazioni libere citate, che possono rinforzarsi raddoppiandosi in intensità qualora siano in fase od azzerarsi in condizioni di cancellazione.

Il secondo termine, denominato impronta dinamica del treno (dynamic signature):

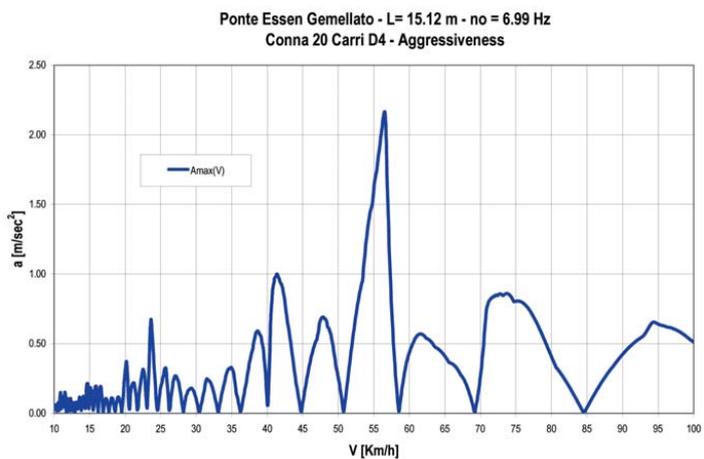


Fig. 11 - Accelerazioni massime (aggressiveness) - Colonna di 20 Carri D4.

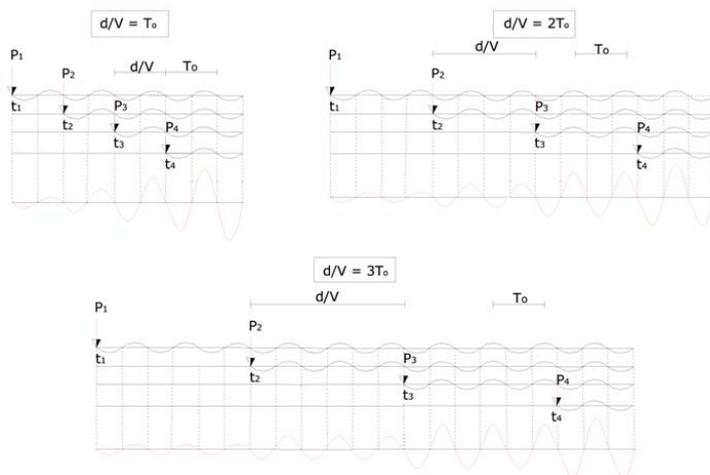


Fig. 12 - Sovrapposizione delle vibrazioni libere in condizioni di risonanza.

Gemellato” in assenza di smorzamento. Si evidenzia la modifica operata dalla linea di influenza dinamica nel generare velocità di cancellazione, per le quali la accelerazione residua si annulla, e nell’amplificare i picchi della impronta dinamica prossimi ai valori di velocità per i quali le due vibrazioni libere indotte dal transito del singolo carico risultano tra loro in fase.

**5. Risonanza e cancellazione**

Amplificazioni dinamiche rilevanti possono instaurarsi qualora l’impalcato ferroviario sia assoggettato al transito di gruppi di carichi disposti con periodicità spaziale, d, costante e pari ad esempio alla lunghezza di carri uguali disposti in sequenza. In questo caso si verificano condizioni di risonanza quando un multiplo della frequenza di transito dei carri, V/d, coincide con la frequenza di oscillazione del ponte, n<sub>o</sub>, o in termini duali quando la durata del passaggio sul ponte, d/V, è un multiplo del periodo di oscillazione, T<sub>o</sub>=1/n<sub>o</sub>. Tale circostanza che si manifesta per una velocità di transito:

$$V_r = \frac{n_o d}{i} \quad (i=1,2,3,..)$$

In tale ipotesi ogni gruppo di carichi periodici genera una oscillazione libera che si somma direttamente in ampiezza alle vibrazioni libere indotte dall’azione impulsiva dei gruppi di carichi precedentemente transitati, avendo tutte le vibrazioni libere la stessa fase.

Nel caso di n carichi tutti di uguale intensità P ed equidistanti (d<sub>i-1</sub>= d = cost; fig. 12) l’impronta dinamica in

condizioni di risonanza (ωd/V=2πi), risulta valere R=n·P, circostanza questa a cui va ascritto il caratteristico andamento ad involuppo linearmente crescente della time-history della freccia in mezzeria (fig. 12). In tale condizione l’oscillazione si rinforza ad ogni transito, raggiungendo un’ampiezza in termini di vibrazioni libere pari a:

$$\delta_{max} = n P \delta_w^1 \frac{K}{1-K^2} \cdot |2 \cos(\frac{\pi}{2K})| = n \delta_{max}(P)$$

ossia pari ad n volte l’oscillazione residua indotta dal singolo carico.

Conclusioni equivalenti possono poi ricavarsi per il transito di n carrozze uguali di lunghezza d, caso per il quale indicato con R<sub>c</sub> il carico equivalente al transito degli assi una singola carrozza computato con i criteri visti in precedenza, l’ampiezza della risposta dinamica assume il valore:

$$\delta_{max} = n R_c \delta_w^1 \frac{K}{1-K^2} \cdot |2 \cos(\frac{\pi}{2K})| = n \delta_{max}(R_c)$$

ossia pari ad n volte l’oscillazione libera indotta dal singolo carro ferroviario. Considerazioni simili si deducono poi nel caso dei sistemi debolmente smorzati. Da quanto esposto in precedenza si arguisce che anche per il caso di più carichi consecutivi, per velocità pari a:

$$V_c = \frac{2n_o L}{2i-1} \quad (i=1,2,3,..)$$

si verifica il fenomeno opposto in virtù del quale le oscillazioni libere si manifestano in controfase [cos(π/2K)=0] producendo il fenomeno rilevante della cancellazione delle oscillazioni residue. E’ importante rilevare che la velocità di cancellazione è una caratteristica intrinseca della struttura in quanto non dipende, diversamente da quella di risonanza, dalla distribuzione dei carichi, ma unicamente dalle frequenze di oscillazione e dalla luce del ponte. Una dettagliata analisi del tema si trova riportato negli studi di LI e FAN [6], di YANG, YAU e WU [9] e di LENZI e GAMBÌ, [11],[14].

**6. Modello di massa mobile**

Il modello di forza mobile, si è visto, ha il pregio di fornire una soluzione analitica in forma chiusa che consente l’interpretazione del fenomeno fisico e la decodifica dei singoli contributi alla vibrazione risultante. Tale modello trascura peraltro gli effetti di inerzia della massa del carico mobile che possono essere messi in conto con relativa sempli-

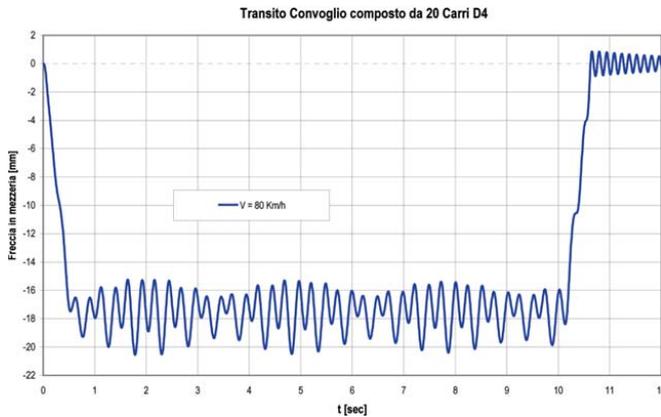


Fig. 13.1 - Modello a masse mobili - V=80 km/h.

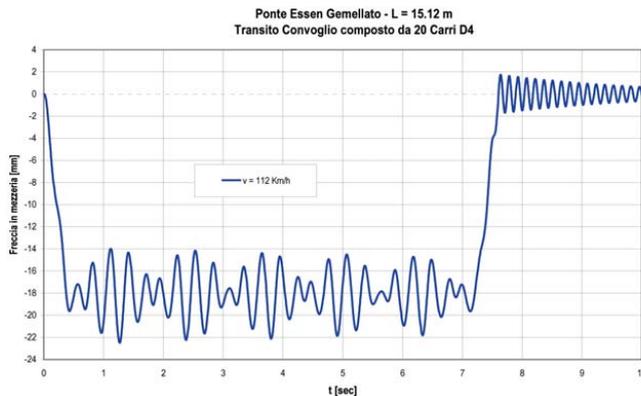


Fig. 13.2 - Modello a masse mobili - V=112 km/h.

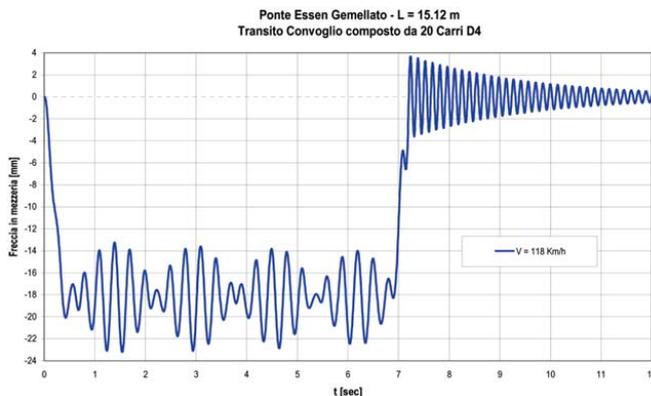


Fig. 13.3 - Modello a masse mobili - V=118 km/h.

cità nell'ipotesi limite di sospensioni infinitamente rigide. In questo caso infatti l'accelerazione verticale locale dell'impalcato viene trasmessa anche alle masse in transito ivi direttamente a contatto. Assunto che sul ponte siano presenti, in un dato istante, k carichi numerati da  $i=1,2,..,k$ , l'equazione del moto, includendo il contributo inerziale e trascurando la forza di Coriolis e quella centrifuga, diviene la seguente:

$$m \ddot{w} + c \dot{w} + EJw^{IV} = \sum_i [P_i - M_i w(x_i)] \delta(x_i - vt)$$

relazione nella quale  $M_i$  è la massa associata al carico mobile  $P_i$ . Adottando la stessa tecnica risolutiva utilizzata per il modello di forza mobile ed indicata con  $M^*$  la massa efficace:

$$M^* = M + \sum_i M_i \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi x_i(t)}{L} \right)$$

essendo  $M$  ancora la massa modale dell'impalcato, l'equazione del moto assume la forma:

$$\ddot{q}(t) + 2\xi^* \omega^* \dot{q}(t) + \omega^{*2} q(t) = \sum_i \frac{P_i}{M^*} \cdot \sin \left[ \pi \frac{x_i(t)}{L} \right]$$

nella quale:

$$\omega^* = \omega \sqrt{\frac{M}{M^*}}$$

La frequenza di oscillazione propria del ponte durante il transito dei convogli risulta perciò variabile nel tempo e viene a dipendere dalla massa efficace istantanea che comprende oltre quella propria della struttura anche quella del mezzo in transito, con una riduzione della frequenza di oscillazione tanto maggiore quanto più le masse mobili si trovano prossime alla mezzera. La modifica della frequenza di oscillazione costituisce l'effetto più rilevante indotto dall'inerzia della massa mobile in transito. L'equazione del moto diviene in questo caso un'equazione differenziale a coefficienti variabili nel tempo ed è integrabile per via numerica utilizzando ad esempio il metodo di Newmark o il metodo  $\theta$  di Wilson.

A titolo esemplificativo viene riportata, nelle figure seguenti, la time history della freccia in mezzera del Ponte Essen Gemellato al variare della velocità di transito dedotta utilizzando il modello di massa mobile. Come si può notare dall'evoluzione delle time histories (fig. 13), man mano che la frequenza di transito,  $V/d$ , si avvicina al crescere della velocità

alla frequenza di oscillazione dell'impalcato ( $n_o^* = \omega^*/2\pi$ ) si manifesta dapprima il fenomeno dei battimenti con frequenza di oscillazione  $f_m = (V/d + n_o^*)/2$  e frequenza del battimento  $f_b = (V/d - n_o^*)/2$ , per poi raggiungere la condizione di risonanza. La sovrapposizione in una scala comune dei grafici delle time histories relative alle velocità di 80, 134 e 142 km/h è riportata in fig. 14 che evidenzia la marcata amplificazione della risposta strutturale quando si raggiungono le condizioni di risonanza per somma di oscillazioni libere residue.

### 7. Modello a oscillatori mobili

La risposta dinamica di un impalcato, si è visto, dipende sostanzialmente dalla frequenza di transito dei carichi e dalla frequenza di oscillazione propria della struttura. Questa a sua volta è funzione della massa presente in un dato istante sul ponte e delle caratteristiche di deformabilità sia dell'impalcato che del convoglio trattandosi di un problema (complesso) di interazione treno-struttura. Un modello più consono dei precedenti e che tiene conto di tali contributi è quello che simula i carichi tramite oscillatori mobili in cui la massa in transito è vincolata ad una monosospensione di rigidità  $K_v$  e da un ammortizzatore avente costante di smorzamento  $C_v$ .

Individuando il parametro di interazione nella forza di contatto, i movimenti indipendenti sono costituiti dagli  $n$  spostamenti verticali delle masse in transito e dalla freccia della mezzeria del ponte  $[q(t)]$ . L'equazione del moto può essere pertanto rappresentata nella forma matriciale canonica:

$$[M]\{\ddot{w}\} + [C]\{\dot{w}\} + [K]\{w\} = \{P\}$$

che va integrata per via numerica. Si intuisce che l'introduzione delle caratteristiche di deformabilità e di smorzamento del mezzo in transito modifica gli autovalori del sistema treno-struttura, ossia le frequenze proprie di oscillazione del modello meccanico rappresentato in fig. 15. Diversamente dal modello precedente, nel modello ad oscillatori le masse mobili non si sommano direttamente alla massa modale dell'impalcato. La modifica della risposta in frequenza di-

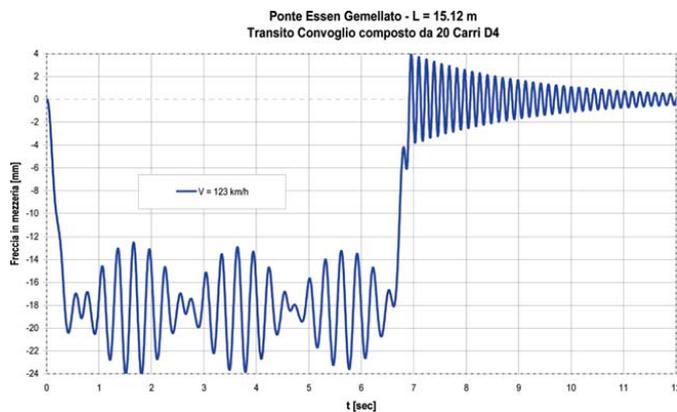


Fig. 13.4 - Modello a masse mobili - V=123 km/h.

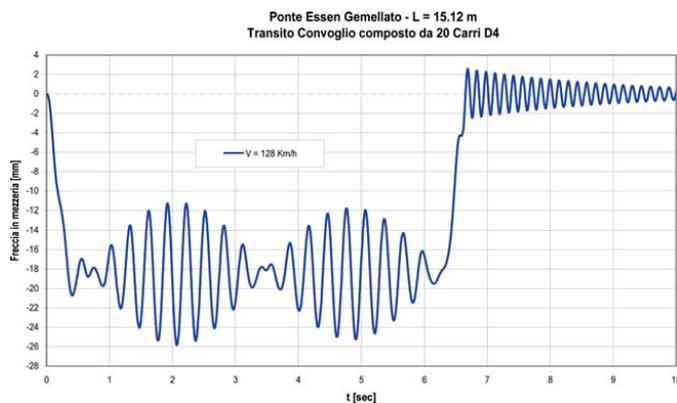


Fig. 13.5 - Modello a masse mobili - V=128 km/h.

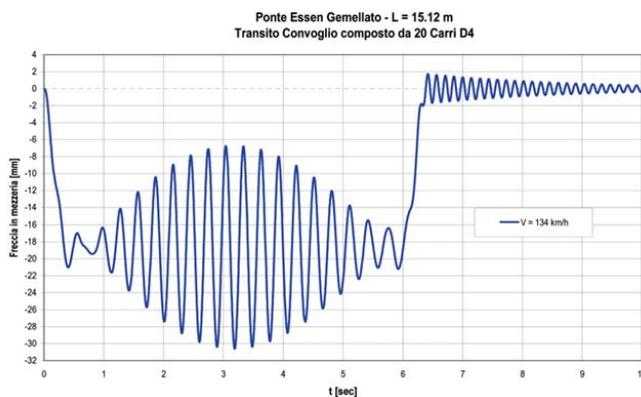


Fig. 13.6 - Modello a masse mobili - V=134 km/h.

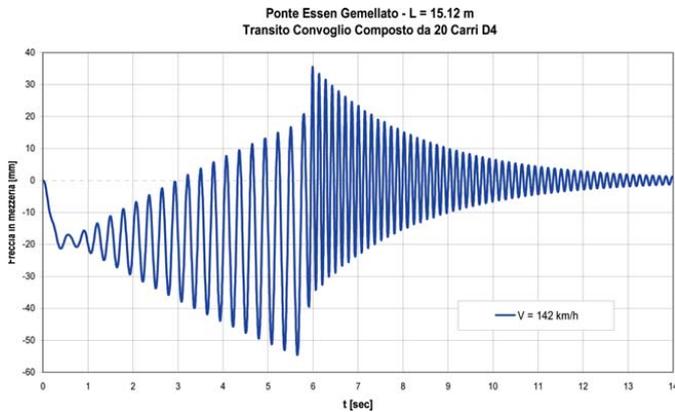


Fig. 13.7 - Modello di masse mobili – Time histoires 20 Carri D4 – Velocità da 80 a 142 km/h.

zione della trave e quindi della velocità di risonanza, in genere nettamente separate dalla frequenza dominante di circa 1Hz corrispondente alla frequenza di oscillazione delle masse sospese. Ne consegue in genere che la presenza delle sospensioni e degli ammortizzatori riduce, anche significativamente (GOICOLOEA e al. [4],[13].) l'amplificazione dinamica, ragione per cui l'Eurocodice EN 1991-2 prevede l'impiego del modello a forza mobile e di un modesto smorzamento addizionale che tiene conto in forma semplificata dell'interazione treno-struttura (MANCEL [7]).

8. Case History

pende invece dall'accoppiamento tra le rigidzze delle sospensioni del convoglio e della massa modale dell'impalcato, come può mostrarsi scrivendo le equazioni degli autovalori per il caso di un solo oscillatore in transito. Questa circostanza produce un innalzamento della frequenza libera della forma modale associata all'oscilla-

Come esempio di applicazione della procedura illustrata si presenta il caso relativo al Ponte "Essen Gemellato", sviluppato e impiegato dalla Essen Italia S.p.A., società leader nel settore dei ponti ferroviari provvisori. Il suo nome deriva dalla evoluzione del Ponte "Essen Standard", allo scopo di aumentare le luci di lavoro utili nelle applicazioni a travi semplicemente appoggia-

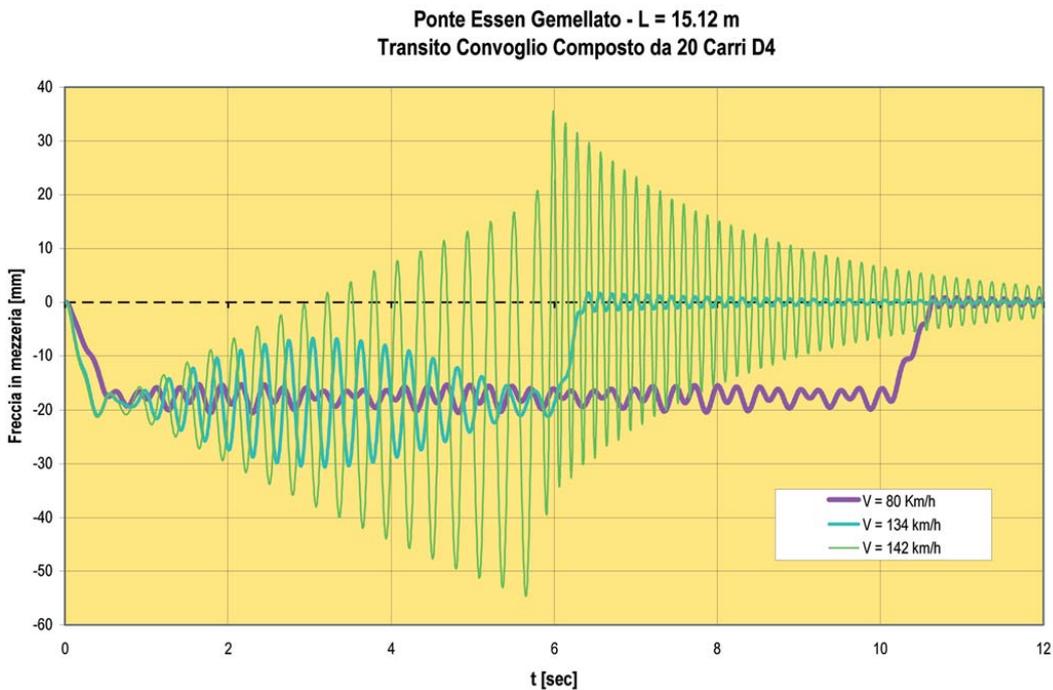


Fig. 14 - Modello a massa mobile – Sovrapposizione time histories per V=80-134-142 km/h.

te per consentire l'esecuzione di sottopassi ferroviari, di medie e grandi dimensioni, in opera o a spinta.

Il Ponte "Essen Gemellato" è un impalcato metallico sostenuto da due travi maestre in acciaio, travi gemelle, aventi sezioni di altezza variabile e disposte parallelamente ai binari ad una distanza tra le linee medie di 3.35 m.

Le due travi portanti, estradossate rispetto al piano del ferro, scaricano su appoggi fissi del tipo a disco elastomero confinato e forniscono il sostegno alla passerella Essen leggera. Come nel caso del Ponte "Essen Standard", le rotaie sono sorrette a loro volta da selle metalliche interposte tra le traversine e vincolate alla passerella.

La passerella si appoggia, infine, su traverse in acciaio disposte ad interasse longitudinale di 2.52 m che a loro volta sono sostenute dalle travi portanti (fig. 16).

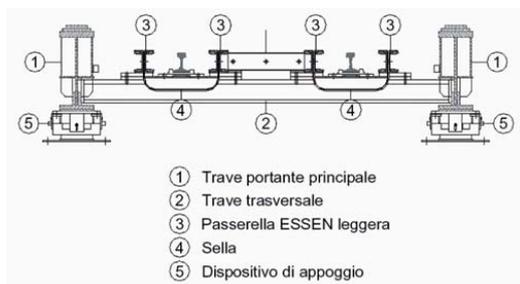


Fig. 16 - Sezione trasversale del Ponte "Essen Gemellato".

Le due travi portanti hanno una luce massima di lavoro di 17,64 m e possono essere impiegate anche su luci inferiori, in genere multiple dell'interasse tra le traverse di sostegno delle longherine della passerella Essen. Le configurazioni usuali d'impiego del Ponte sono con luci di 10,08, 12,60, 15,12 e 17,64 m.

Il Ponte "Essen Gemellato" consente una velocità di transito dei treni fino a 80 km/h, funzione della luce di lavoro, in linee di categoria D4. (fig. 17).

Il ponte trova quindi impiego in tutte quelle applicazioni che richiedono alla struttura medie e grandi lu-

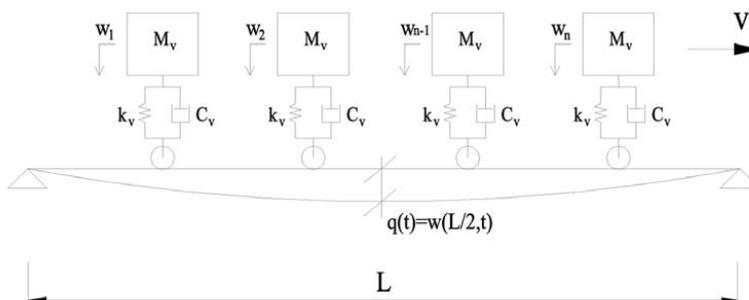


Fig. 15 - Modello con oscillatori mobili.

ci di lavoro quali l'esecuzione di sottopassi ciclopedonali e carrabili da realizzarsi in opera (eventualmente previa esecuzione di idonee paratie per il contenimento dello scavo in verticale) o prefabbricati fuori opera e successivamente posti in esercizio mediante la tecnica dell'infissione oleodinamica di strutture scatolari (fig. 18).

Riassumendo, le prestazioni specifiche del Ponte "ESSEN Gemellato" sono:

- velocità di transito dei convogli ferroviari fino a 80 km/h;
- luce di lavoro massima di 17.64 m;
- montaggio della struttura senza interruzione dell'esercizio ferroviario;
- concezione strutturale a garanzia dell'esercizio ferroviario in ogni fase lavorativa;
- travi principali estradossate - ridotto ingombro sotto il piano traverse;
- inserimento della struttura in qualsiasi geometria di binario (raccordo parabolico, curva).

Ad oggi, il Ponte "Essen Gemellato" è stato utilizzato con successo in diversi interventi nell'ambito del sistema ferroviario nazionale (fig. 19).

Le prove sperimentali sono state condotte in occasione di due interventi, rispettivamente lungo la linea Bari-Lecce in località Squinzano (LE) (oggetto di una prece-

Luce [m]	Velocità max [Km/h]	reazione [KN] est. verticale	reazione [KN] int. verticale	reazione [KN] orizz. assiale	reazione [KN] orizz. trasversale
5.04	80	320.65	211.32	38.07	94.32
7.56	80	403.10	262.46	38.07	110.81
10.08	80	578.62	405.60	50.77	122.59
12.60	80	596.84	420.82	63.46	132.54
15.12	80	767.92	456.31	76.16	144.96
17.64	30 <sup>(*)</sup>	726.28	446.98	76.16	92.79

(\*) Da autorizzare.

Fig. 17 - Reazioni agli appoggi del Ponte "Essen Gemellato".

dente nota [1]) e lungo la linea Milano-Lecco presso la stazione di Cernusco-Lombardone (fig. 20), per la realizzazione di due sottopassi pedonali nell'ambito dei lavori di raddoppio delle linee.

Il programma di indagine sperimentale è stato preventivamente approvato da R.F.I. S.p.A. Direzione Investimenti - Ingegneria Civile/Ponti, che ha fornito tutto il supporto e la collaborazione necessaria.



Fig. 18 - Particolare del Ponte "Essen Gemellato".

Nel corso dell'applicazione del Sistema lungo la linea Milano-Lecco, il Ponte "Essen Gemellato" è stato testato con luce di impiego di 15,12m (fig. 21) e velocità di transito del Locomotore E656 di prova (fig. 22) sino al valore massimo di omologazione del sistema Essen di 80 km/h. Nelle figg. 23 e 24 sono riportati i diagrammi delle frecce teoriche e di quelle sperimentali elaborate dalla Soc. 4 Emme di Milano che ha fornito il supporto strumentale alle prove.

9. Parametri dinamici

Al fine di identificare i parametri dinamici del Ponte Essen nel corso della prova si è provveduto a determinare la freccia statica in mezzeria durante lo stazionamento del mezzo sull'impalcato e determinata la prima frequenza di oscillazione applicando la trasformata rapida di Fourier (FFT) alla registrazione delle oscillazioni libere successive al transito del locomotore. Mediante l'utilizzo delle formule che definiscono detti parametri e dei corrispondenti valori sperimentali, entrambe di seguito riepilogati:

$$w_{st} = \sum_i \frac{P_i L^3}{48 E J} \sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right) = 16.05 \text{ mm}$$

$$n_o = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 6.99 \text{ Hz}$$

è stato possibile dedurre i parametri di rigidezza equivalente e di massa modale dell'impalcato, ottenendo i valori seguenti:

$$EJ = 3.33 \cdot 10^6 \text{ KNm}^2$$

$$mg = 31.5 \text{ KN/ml}$$

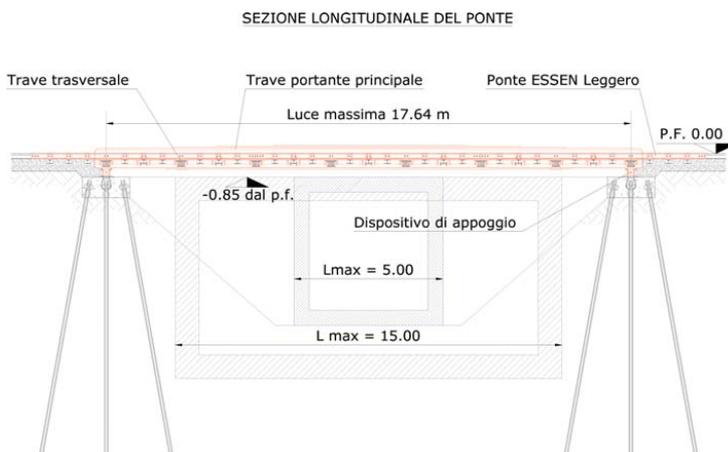


Fig. 19 - Ponte "Essen Gemellato" - Schema tipico di impiego.

che definiscono in maniera univoca la risposta dinamica della struttura. Come verifica dei valori di back analysis il modello di forza mobile con smorzamento all'1%, con i precedenti parametri dinamici del ponte, restituisce per la trave gemella (sensore nr. 1) un valore della freccia dinamica teorica di 17.46 mm a fronte di un valore misurato di 17.42 mm.

10. Analisi di risonanza

Definito il modello teorico di riferimento e determinati sperimentalmente i parametri dinamici del sistema strutturale, si è proceduto

TABELLA 1  
VELOCITÀ DI RISONANZA (COLONNA DI 20 CARRI D4) E VELOCITÀ DI CANCELLAZIONE

Indice nr. (i)	Velocità di risonanza $V_R$ (Km/h)	Coefficiente dinamico $\Psi_{REALE}$	Velocità di cancellazione $V_c$ (Km/h)	Note
1	284	1.992	761	$V_R = n_o d / i$
2	142	1.820	254	$n_o = 6.99$ Hz
3	94	1.061	152	$d = 11.25$ m
4	71	1.090	109	$V_c = 2 n_o L / (2i-1)$
5	57	1.194	85	$n_o = 6.99$ Hz
6	47	1.072	69	$L = 15.12$ m



Fig. 20 - Intervento lungo la linea Milano-Lecco presso la stazione di Cernusco-Lombardone.

a simulare per via teorica l'amplificazione dinamica indotta dal passaggio di un convoglio di 20 Carri D4 che costituisce il treno di carico reale circolante più gravoso utilizzato in sede di verifica della struttura. Ciascun Carro D4 ha una lunghezza  $d=11.25$  m e consta di 4 assi da 22.5

t distanziati consecutivamente di 1.80 m, 4.65 m, 1.80 m (fig. 25). Lo smorzamento strutturale è stato assunto pari a 1% includendo in tale valore lo smorzamento addizionale previsto dall'EC1 - 2 per l'interazione treno-struttura in acciaio su luci di 15 m.

L'analisi di risonanza è riportata in fig. 26 che mostra l'andamento del coefficiente dinamico, definito come rapporto fra la freccia dinamica e la freccia quasi statica, in funzione della velocità di transito con evidenziate le velocità riportate in tab. 1 per le quali si verifica risonanza (R) o cancellazione (C). L'andamento del grafico mostra una amplificazione massima della risposta strutturale a 142 km/h ed evidenzia come la velocità di progetto del Ponte Essen Gemellato di 80 km/h sia esente da amplificazione dinamica significativa e sia in realtà una velocità ottimale di transito essendo prossima alla velocità di cancellazione di 85 km/h. L'amplificazione massima nel range di velocità ammesse è pari circa al 20% (a fronte di un valore normativo del 27%) e si registra per una velocità di circa 57 km/h per la quale l'impronta dinamica presenta un massimo locale ed è contemporaneamente significativo l'effetto di interferenza tra le due vibrazioni libere generate dall'entrata e dall'uscita dal ponte del singolo carico. La rotazione all'appoggio, determinata con l'analisi dinamica modale utilizzando 10 armoniche, risulta pari a  $4.42 \cdot 10^{-3}$  rad.

### 11. Conclusioni

La dinamica dei ponti ferroviari presenta caratteristiche peculiari sovrapponendosi amplificazioni del moto che hanno origini diverse. Differentemente da altri fenomeni dinamici in cui la forzante segue una legge armonica che completa il suo ciclo, nel caso dei ponti soggetti al transito di un carico mobile la forza viaggiante produce i suoi effetti diretti solo per un semiperiodo dopo il quale il carico esce

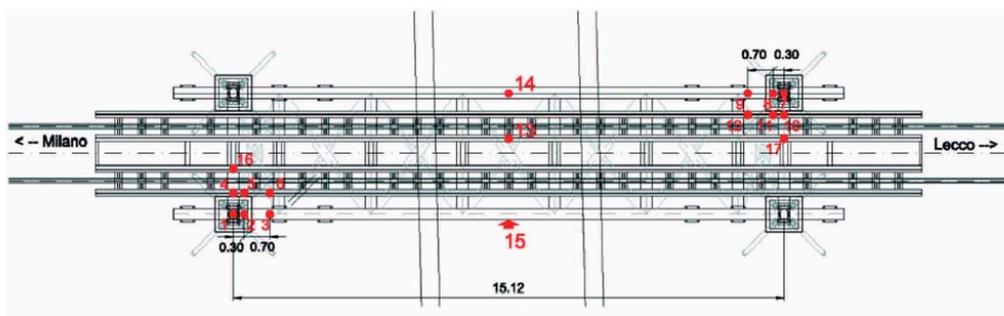


Fig. 21 - Disposizione planimetrica dei trasduttori di spostamento.

dal ponte. Essa genera quindi un effetto diretto corrispondente all'amplificazione dinamica rispetto al valore statico e lascia in eredità un'oscillazione libera. Questa a sua volta si compone di due contributi che nascono il primo all'ingresso del carico sul ponte ed il secondo alla sua uscita, a seguito rispettivamente della applicazione e della soppressione istantanea della forza mobile ed aventi la stessa ampiezza che cresce con la velocità di transito. Data la linearità delle equazioni del moto l'effetto di più forze viaggianti si determina per semplice sovrapposizione delle time history individuali sfalsate del ritardo relativo all'istante di ingresso del carico sul ponte. Dato che fenomeni di instabilità dinamica non possono verificarsi, amplificazioni rilevanti possono verificarsi invece per carichi ripetuti disposti con periodicità spaziale dato che ognuno di essi, al suo ingresso ed alla sua uscita dal ponte, genera un treno d'onde che si somma a quello indotto dai carichi già transitati. S'intuisce che se ogni carrozza ferroviaria produce vibrazioni che hanno tutte la stessa fase, circostanza che si verifica per frequenze di oscillazione pari ad un multiplo della frequenza di transito, la vibrazione si rinforza nel tempo anche se i carichi che l'hanno generata sono già transitati, permanendo a lungo l'oscillazione libera in virtù del modesto smorzamento strutturale. L'influenza della massa in transito riveste invece una piccola influenza anche per impalcati leggeri quali quelli in acciaio qualora, come sempre avviene, le carrozze ferroviarie siano dotate di sospensioni ed ammortizzatori, circostanza che disaccoppia di fatto la risposta del veicolo da quella della struttura validando in tal modo il modello di forza mobile, come assunto dall'Eurocodice di settore.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. LIBERATORE, M. COLELLA, C. VILLATICO, "Interazione dinamica treno-binario-struttura: analisi parametrica della risposta strutturale", Ingegneria Ferroviaria, Anno XXXVI, nr.12, Dicembre 1992, inserita in *Ponti e Viadotti*, Monografia I.F. Nr. 90.1.7.

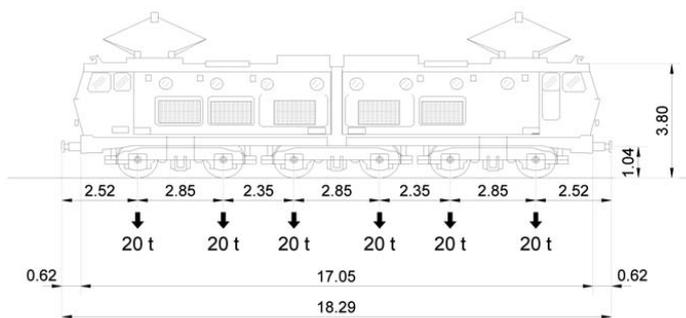


Fig. 22 - Locomotore di prova E656.

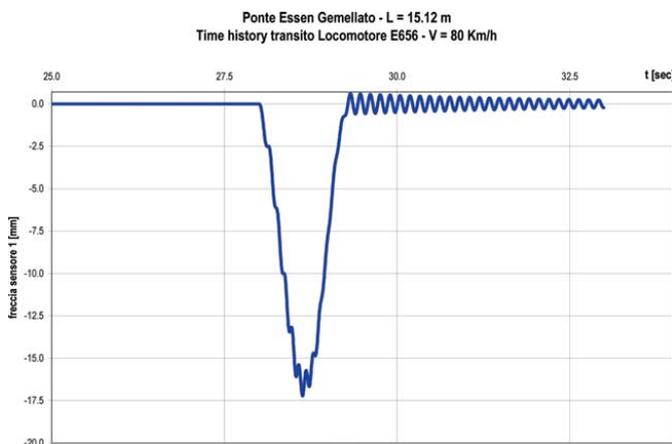


Fig. 23 - Freccie teoriche trave gemella (sensore 1) – Transito Locomotore E656.

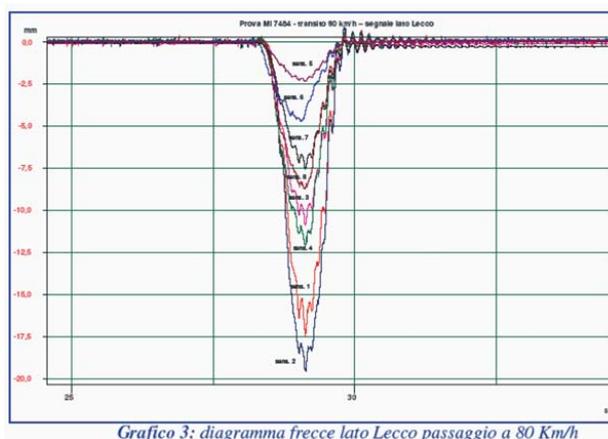


Grafico 3: diagramma frecce lato Lecco passaggio a 80 Km/h

Fig. 24 - Freccie sperimentali – Transito Locomotore E656.

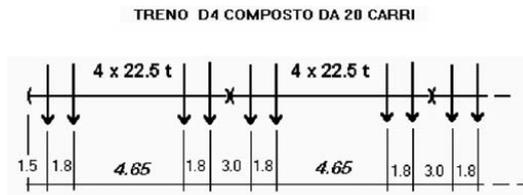


Fig. 25 - Schema di convoglio di carri D4 previsto per l'analisi di risonanza.

[2] L. FRYBA, "Dynamics of Railway Bridges", Ch. 1 and Ch.5, Thomas Telford, London, 1996.  
 [3] L. FRYBA, "Vibration of Solids and Structures under Moving Load", Ch. 1, Thomas Telford, London, 1999.  
 [4] J.M. GOICOLEA, J. DOMINGUEZ, J.A. NAVARRO, F. GOBALDON "New dynamic analysis method in railway bridges in code IAPF and Eurodoce 1", Proceedings of symposium "Railway Bridges. Design, Construction and Maintenance", Spanish Group of IABSE, Madrid, 2002.

[5] V. DE VILLE DE GOYET, "The critical speed notion concerning the high-speed railway viaducts", Proceedings of the IABSE Symposium "Structure for high-speed railway transportation", Antwerp, 2003.  
 [6] J. LI, L.C. FAN, "An assessment of resonant vibration for bridge under train", Proceedings of the IABSE Symposium "Structure for high-speed railway transportation", Antwerp, 2003.  
 [7] F. MANCEL, "Recent developments in the dynamics of high speed lines bridges", Proceedings of the IABSE Symposium "Structure for high-speed railway transportation", Antwerp, 2003.  
 [8] D. MARVILET, J.P. TARTARY "Bridge, high speed and dynamic calculations", Proceedings of the IABSE Symposium "Structure for high-speed railway transportation", Antwerp, 2003.  
 [9] Y.B. YANG, J.D. YAU, Y.S. WU, "Vehicle - Bridge Interaction Dynamics", Ch. 1-4, World Scientific, Singapore, 2004.  
 [10] G. MUSCOLINO, "Analisi dinamica di ponti ferroviari: interazione ponte-veicolo", 2° Workshop FENDIS, Roma, Dicembre 2004.  
 [11] M. LENZI, A. GAMBÌ, L. IMPELLIZZIERI, V. BRUSÀ, "Riso-

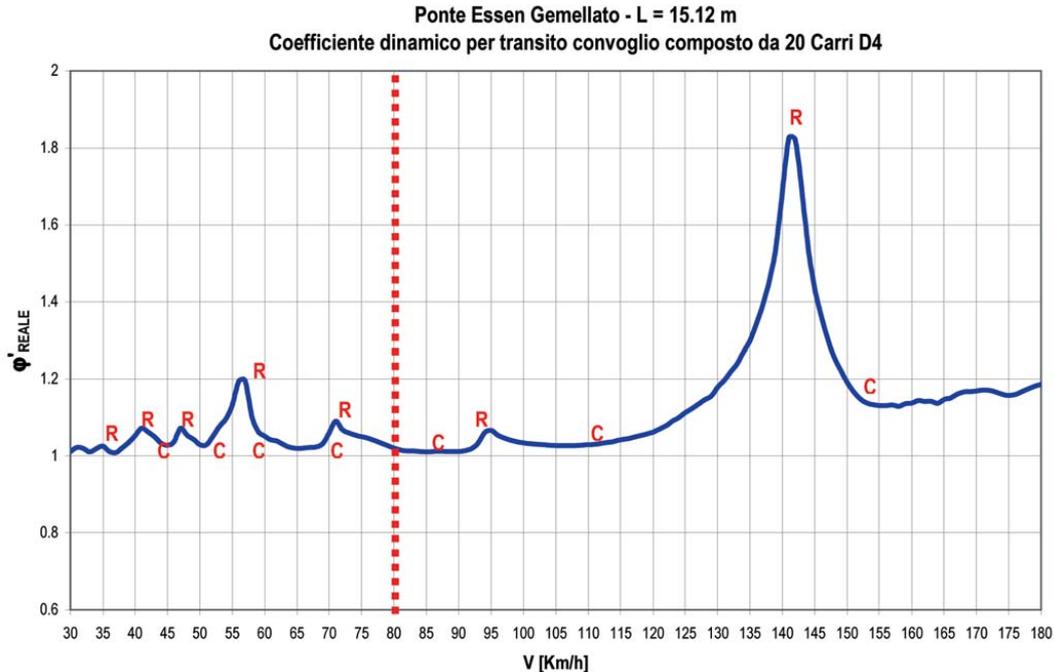


Fig. 26 - Coefficiente dinamico in funzione della velocità di transito - Colonna di Carri D4.

nanza e cancellazione nella dinamica dei ponti ferroviari - Applicazione nel caso del Ponte Essen Gemellato", Ingegneria Ferroviaria, Anno LIX, nr. 10, Ottobre 2005.

[12] UNI EN 1991-2 : "Eurocode 1 - Actions on structures - Part 2 : Traffic loads on bridges", Ente Italiano di Unificazione, Milano, 2005.

[13] J.M. GOICOLEA, "Efectos dinamicos en puentes de ferrocarril. Repercusion sobre la normativa y el proyecto", 3º Encuentro Annual sobre Puentes, I.I.R., Madrid, 2006.

APPENDICE

L'oscillazione libera che si instaura dopo il transito di un carico mobile è descritta per un sistema non smorzato dalla time history seguente:

$$q_2(t) = -P \delta_{st}^1 \frac{K}{(1-K^2)} \cdot \{\sin(\omega t) - \sin[\omega(t - \frac{L}{V})]\}$$

Tenuto conto della proprietà delle funzioni trigonometriche per la quale:

$$\sin(\omega t) - \sin[\omega(t - \frac{L}{V})] = \cos(\omega \frac{L}{2V}) \sin[\omega(t - \frac{L}{2V})]$$

la relazione precedente diviene:

$$q_2(t) = -P \delta_{st}^1 \frac{K}{(1-K^2)} \cdot \cos(\omega \frac{L}{2V}) \sin[\omega(t - \frac{L}{2V})]$$

La somma delle vibrazioni libere residue indotte dal passaggio di più carichi si ricava poi a sua volta per sovrapposizione degli effetti, ottenendo l'equazione:

$$q_2(t) = -\delta_{st}^1 \frac{K}{1-K^2} 2 \cos(\frac{\pi}{2K}) \sum_{k=1}^j P_k \sin[\omega(t - t_k - \frac{L}{2V})]$$

La sommatoria che vi compare può essere espressa, utilizzando la notazione complessa, nella forma seguente:

$$S = \sum_{k=1}^j P_k \cdot \exp[-i\omega(t - t_k - \frac{L}{2V})] = \sum_{k=1}^j P_k \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V})] \exp(i\omega t_k) = \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V})] \sum_{k=1}^j P_k \exp(i\omega t_k) = \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V})] \sum_{k=1}^j P_k [\cos(\omega t_k) + i \sin(\omega t_k)] = \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V})] (\sum_{k=1}^j P_k \cos(\omega t_k) + i \sum_{k=1}^j P_k \sin(\omega t_k))$$

Indicati con:

$$R_e = \sum_{k=1}^j P_k \cos(\omega t_k) \quad I_m = \sum_{k=1}^j P_k \sin(\omega t_k)$$

le componenti reale ed immaginaria del numero complesso  $R \cdot \exp(i\varphi)$  il cui modulo e fase, posto  $t_k = d_{1,k}/V$ , sono definite dalle relazioni:

$$R = \sqrt{R_e^2 + I_m^2} = \left\{ \left[ \sum_{k=1}^j P_k \cos(\omega \frac{d_{k-1}}{V}) \right]^2 + \left[ \sum_{k=1}^j P_k \sin(\omega \frac{d_{k-1}}{V}) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{I_m}{R_e} = \frac{\sum_{k=1}^j P_k \sin(\omega d_{k-1}/V)}{\sum_{k=1}^j P_k \cos(\omega d_{k-1}/V)}$$

si ottiene per la somma ricercata:

$$S = \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V})] \cdot R \exp[i\varphi] = R \exp[-i\omega(t - \frac{L}{2V} - \varphi)]$$

Operando la trasformazione inversa si ricava infine per l'oscillazione risultante l'espressione seguente:

$$q_2(t) = -R \delta_{st}^1 \frac{K}{(1-K^2)} \sin[\omega(t - \frac{L}{2V} - \varphi)]$$

Sommaire

ANNOTATIONS SUR LA DYNAMIQUE DES PONTS FERROVIAIRES - Applications dans le cas du pont "Essen Jumelé"

Dans la note on prend en examen le comportement dynamique des ponts ferroviaires, tout en focalisant l'attention sur les conditions qui déterminent l'amplification dynamique de la réponse structurelle. On décrit des exemples numériques et des comparaisons avec les données expérimentales relatives à l'emploi du système pour le soutien provisoire des rails dénommé pont "Essen Jumelé".

Summary

ANNOTATIONS ON RAILWAY BRIDGE DYNAMICS - Application to the case of Essen Bridge System

This paper analyses the dynamic behaviour of the railway bridges with a specific attention to the conditions that determine the dynamic amplification of the structural response. Numerical examples are here illustrated and a comparison is then proposed with the experimental data regarding the utilization of the system for temporary track support, named Essen Bridge System.

Zusammenfassung

ANMERKUNGEN ÜBER DER DYNAMIK DER EISENBAHNBRÜCKEN - Anwendung auf "Essen" doppelten Brücken

Bemerkungen über Brückendynamik mit besonderer Aufmerksamkeit auf die Bedingungen die die strukturelle Antwort vergrößern. Zahlreiche Beispiele und Vergleichen mit experimentellen Resultaten aus dem Betrieb einer provisorischen Brücke des Essen doppelten Typs gewonnen.